

## RÉFLEXION ET RÉFRACTION D'ONDES ACOUSTIQUES PAR UNE ONDE DE CHOC

par J. BRILLOUIN

Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques, Paris

### Sommaire

L'existence d'ondes acoustiques dans l'une ou l'autre des régions du fluide que sépare l'onde de choc se traduit par l'apparition, dans la région en surpression, d'ondes acoustiques (réfléchies ou réfractées selon que les ondes incidentes sont situées dans la région en surpression ou dans la région en dépression) et d'ondes thermiques. Les caractéristiques de ces ondes sont calculées dans le cas où l'onde incidente est plane, progressive et uniforme. Dans le cas de la réfraction l'onde acoustique réfractée peut, selon l'incidence, être plane, progressive et uniforme, ou prendre la forme d'une « onde d'accompagnement » qui reste attachée au front de choc tout en glissant parallèlement à ce front. Des constructions géométriques permettent dans tous les cas de déterminer les caractéristiques cinématiques des ondes acoustiques réfléchies ou réfractées. Les relations dynamiques montrent que l'amplitude de l'onde réfléchie est toujours inférieure à celle de l'onde incidente. L'amplitude de l'onde réfractée, quelle qu'en soit la nature, peut, dans certains cas être supérieure à celle de l'onde incidente.

### Zusammenfassung

Schallwellen in dem durch eine Stoßwelle gebildeten Über- oder Unterdruckgebiet führen zum Auftreten von Schallwellen und thermischen Wellen im Überdruckgebiet, wobei die Schallwellen reflektierte oder gebrochene sind, je nachdem, ob der Einfall aus dem Über- bzw. Unterdruckgebiet erfolgt. Die Eigenschaften dieser Wellen wurden für den Fall einer ebenen fortschreitenden einfallenden Welle berechnet. Im Falle der Brechung kann die gebrochene Welle je nach Einfallrichtung wieder eine ebene fortschreitende Welle sein oder aber die Form einer „Kopfwelle“ annehmen, die mit der Stoßwellenfront fest verbunden ist und parallel zu dieser mitläuft. In allen Fällen läßt sich mit Hilfe geometrischer Konstruktionen die Bewegung der gebrochenen oder reflektierten Welle bestimmen. Aus den dynamischen Verhältnissen ergibt sich, daß die Amplitude der reflektierten Welle stets kleiner ist als die der einfallenden, während die Amplitude der gebrochenen Welle, welcher Art sie auch sei, in gewissen Fällen größer werden kann als die der einfallenden.

### Summary

Sound waves in one or other of the fluid regions on either side of a shock wave are made apparent in the region under excess pressure by acoustic waves (reflected or refracted according as the incident waves lie in the region of pressure excess or defect) and by thermal waves. The characteristics of these waves are calculated for a plane, progressive, uniform incident wave. In the refracted case, the refracted acoustic wave can, according to the incidence, be plane, progressive and uniform or take the form of an "onde d'accompagnement" which remains attached to the front of the shock while sliding parallel to it. Geometric constructions allow in each case the kinematic characteristics of the reflected or refracted acoustic waves to be determined. Dynamic relationships show that the amplitude of the reflected wave is always less than, but that of the refracted wave in certain cases greater than, the amplitude of the incident wave.

## 1. DONNÉES DE BASE

### 1.0. Généralités

#### 1.0.0. Objet de travail

La réflexion et la réfraction des ondes sonores par une onde de choc n'intéressent pas seulement l'acoustique. Ces phénomènes peuvent être utilisés en aérodynamique pour déceler ou mesurer l'évolution des chocs.

Le présent travail est une tentative de théorie d'un cas relativement simple: onde de choc plane

et uniforme séparant deux régions dans chacune desquelles le fluide est, aux phénomènes acoustiques près, en équilibre de pression et de température; onde acoustique incidente plane, progressive et uniforme.

Ce problème à déjà fait l'objet de quelques publications. BURGERS [1] et BLOKHINTZEV [2], d'une part, ont étudié analytiquement le cas de l'incidence normale dans un fluide sans viscosité. Ils montrent que, pour satisfaire aux conditions à la limite, il est nécessaire d'introduire, outre



l'onde acoustique réfléchi ou réfractée, une onde dite « d'entropie ». Cette onde non progressive, comporte des fluctuations de température. C'est la forme asymptotique d'une onde thermique dans l'expression de laquelle on a supprimé les termes d'amortissement. Les résultats ainsi obtenus en ce qui concerne cette onde ne sont donc valables qu'au voisinage de l'onde de choc.

SAUER [3] d'autre part a indiqué les conséquences que l'on peut tirer de la construction d'HUYCHENS, et montré l'existence d'incidences pour lesquelles aucune onde réfractée de type usuel (c'est-à-dire purement longitudinale) ne peut exister.

L'objet du présent travail est d'examiner les points laissés dans l'ombre par les précédents auteurs, à savoir: comportement de l'onde thermique à grande distance, nature du phénomène lorsqu'il n'y a pas d'onde réfractée de type longitudinal. Nous avons donc été conduit à traiter la question sous une forme plus générale, étude analytique faite en tenant compte de la viscosité et de la conductibilité calorifique, incidence quelconque.

### 1.0.1. Hypothèses de base et approximations

a) Dans le calcul, nous considérons l'onde de choc comme une discontinuité: l'épaisseur et la durée d'évolution du choc sont, en effet, très petites vis-à-vis des longueurs d'onde et des périodes acoustiques.

b) Les équations régissant l'onde de choc en régime permanent restent valables en présence d'ondes acoustiques: la lenteur et la faible amplitude des phénomènes acoustiques vis-à-vis du phénomène de choc justifient cette hypothèse, tout au moins en première approximation.

c) Dans l'expression des conditions à la limite, nous négligeons les petites oscillations du front d'onde de choc autour de sa position moyenne. C'est une approximation justifiée dans tous les problèmes acoustiques: du fait que les déplacements acoustiques sont très petits par rapport aux longueurs d'onde, les erreurs ainsi faites sont du second ordre<sup>1</sup>.

Les conditions à la limite s'exprimeront alors sous forme ponctuelle, c'est-à-dire que les relations qui les expriment ne contiennent que les valeurs des grandeurs en cause prises de part et d'autre de la limite (front de l'onde de choc) en un point de cette limite.

<sup>1</sup> Cette hypothèse est implicitement contenue dans le calcul de BURGERS. Cet auteur calcule le mouvement de l'onde de choc par une méthode d'ailleurs inapplicable au cas des ondes obliques, puis, en éliminant dans les conditions aux limites les termes du second ordre, effectue une simplification qui correspond à notre hypothèse.

### 1.0.2. Irréversibilité de l'onde de choc — Conséquences

L'évolution d'une onde de choc est irréversible. Il est donc a priori évident que les conditions à la limite ne pourront pas être satisfaites si, dans les deux régions séparées par l'onde de choc, l'on n'introduit que des phénomènes acoustiques, c'est-à-dire adiabatiques.

Par suite, les petits mouvements engendrés par la rencontre d'une onde de choc et d'une onde acoustique seront exprimés sous leur forme générale telle qu'elle résulte des travaux de STOKES et KIRCHHOFF, c'est-à-dire en tenant compte de la viscosité et de la conductibilité thermique des gaz.

### 1.0.3. Séparation des conditions à la limite

Ces conditions étant ponctuelles on pourra les scinder en deux groupes.

a) Conditions cinématiques, qui régissent la nature et la forme des ondes engendrées par réflexion ou réfraction. Ces conditions, lorsque toutes les ondes en cause sont planes, progressives et uniformes, peuvent être mises sous la forme géométrique de la construction d'HUYCHENS. Dans les autres cas, il est nécessaire de recourir au calcul pour déterminer la nature et la forme des ondes produites. C'est ce que l'on fait par exemple en optique pour traiter le problème de la réflexion totale et obtenir l'onde de CAUCHY.

Les conditions cinématiques expriment simplement le fait que, sur la surface limite, l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes qu'associent la réflexion ou la réfraction est la même. Pour les exprimer il n'est donc pas nécessaire d'utiliser les relations théoriques qui régissent l'onde de choc.

b) Conditions dynamiques, qui n'interviennent que pour calculer l'amplitude des phénomènes dont les conditions cinématiques ont déterminé la nature.

Nous étudierons séparément ces deux groupes de conditions.

## 1.1. Caractéristiques de l'onde de choc — Conditions à la limite

### 1.1.0. Définitions, notations

Pour désigner les deux régions du fluide séparées par l'onde de choc nous éviterons d'utiliser les termes amont et aval qui, en aérodynamique comme en hydraulique, prêtent à ambiguïté. Si l'onde de choc est immobile (soufflerie, ressaut), c'est la région aval qui est en surpression. Si l'onde se propage dans un fluide au repos (tube à



choc, onde de crue) c'est la région amont qui est en surpression.

Nos notations seront donc:

$E_0$  = région en dépression, s'étendant de S vers les  $x$  positifs,

$E_1$  = région en surpression, s'étendant de S vers les  $x$  négatifs,

S = front (plan) de l'onde de choc séparant les deux régions, perpendiculaire à l'axe des  $x$ .

Nous utiliserons trois systèmes d'axes:

$o x_0 y z$  immobiles par rapport au fluide dans la région  $E_0$ ,

$o x_1 y z$  immobiles par rapport au fluide dans la région  $E_1$ ,

$o X y z$  immobiles par rapport au front d'onde de choc S

$a_0 > 0$  étant la vitesse de propagation du front S dans le fluide contenu en  $E_0$ ,

$a_1 > 0$  la vitesse de propagation de S dans le fluide contenu en  $E_1$ ,

$U$  la différence entre la vitesse d'écoulement du fluide en  $E_1$  et sa vitesse d'écoulement en  $E_0$ ,

nous aurons:

$$x_1 = x_0 - Ut, \quad X = x_0 - a_0 t = x_1 - a_1 t \quad (1.1.1)$$

$$\text{et,} \quad a_0 - a_1 = U. \quad (1.1.2)$$

Nous posons enfin:

	Région $E_0$	Région $E_1$	
pression	$P_0$	$P_1$	
masse spécifique	$\varrho_0$	$\varrho_1$	
température absolue	$T_0$	$T_1$	(1.1.3)
vitesse du son	$c_0$	$c_1$	

Nous prendrons comme variable indépendante définissant l'amplitude de l'onde de choc le rapport:

$$\xi = P_0/P_1. \quad (1.1.4)$$

$\xi$  décroît de 1 à 0 à mesure que l'amplitude du choc augmente.

Nous utiliserons des fonctions sans dimension pour décrire le phénomène. Nous les donnons ci-dessous avec leurs expressions en fonction de  $\xi$  tirées de la théorie classique de l'onde de choc.

Posant

$$\mu = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1},$$

$$F = \frac{c_0}{c_1} = \left( \frac{T_0}{T_1} \right)^{1/2} = \left[ \frac{\xi(\mu + \xi)}{1 + \mu\xi} \right]^{1/2}, \quad (1.1.5)$$

$$R = \frac{\varrho_0}{\varrho_1} = \frac{1 + \mu\xi}{\mu + \xi} = \frac{\xi}{F^2}, \quad (1.1.6)$$

$$Y = \frac{U}{c_0} = \frac{(\mu - 1)(1 - \xi)}{[(\mu + 1)\xi(\mu + \xi)]^{1/2}}, \quad (1.1.7)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{c_0} = \left[ \frac{\mu + \xi}{(\mu + 1)\xi} \right]^{1/2}, \quad A_0 > 1, \quad (1.1.8)$$

$$A_1 = \frac{a_1}{c_1} = \left[ \frac{1 + \mu\xi}{\mu + 1} \right]^{1/2}, \quad A_1 < 1. \quad (1.1.9)$$

Enfin, nous aurons à utiliser les fonctions suivantes, dans lesquelles interviennent les dérivées par rapport à  $\xi$ :  $R'$  et  $Y'$ , de  $R$  et  $Y$ :

$$\xi Y' = - \frac{(\mu - 1)[\mu + (\mu + 2)\xi]}{2(\mu + \xi)[(\mu + 1)\xi(\mu + \xi)]^{1/2}}, \quad (1.1.10)$$

$$J = - \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2 \left( \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \xi \frac{R'}{R} - 1 \right) \quad (1.1.11)$$

$$= - \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2 \left( \frac{(\mu + 1)^2 \xi}{(1 + \mu\xi)(\mu + \xi)} - 1 \right),$$

$$\frac{1}{R F} = \frac{F}{\xi} = \left[ \frac{\mu + \xi}{\xi(1 + \mu\xi)} \right]^{1/2}, \quad (1.1.12)$$

$$G = - \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \xi F Y' \quad (1.1.13)$$

$$= \frac{\mu + (\mu + 2)\xi}{2(\mu + \xi)} \left( \frac{\mu + 1}{1 + \mu\xi} \right)^{1/2},$$

$$H = - \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \left( \xi Y' - \frac{Y}{\mu - 1} \right) \quad (1.1.14)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu + (\mu + 2)\xi}{\mu + \xi} - 2 \frac{1 - \xi}{\mu + 1} \right] \left[ \frac{\mu + 1}{\xi(\mu + \xi)} \right]^{1/2}.$$

Les Tableaux I et II donnent les valeurs de ces diverses fonctions, calculées le plus souvent à la règle, précision qui suffit à notre propos actuel.

### 1.1.1. Grandeurs ondulatoires

La présence d'ondes de faible amplitude ayant une origine acoustique provoque dans les régions  $E_0$  et  $E_1$  de petites variations de la pression, de la masse spécifique et de la température autour de leurs valeurs moyennes.

Pour les représenter nous posons:

$$\bar{\omega} = \delta P/P = \text{excès relatif de pression,}$$

$$s = \delta \varrho/\varrho = \text{excès relatif de masse spécifique, ou condensation,} \quad (1.1.15)$$

$$\theta = \delta T/T = \text{excès relatif de température.}$$

Dans le cas d'ondes acoustiques usuelles  $\bar{\omega}$ ,  $s$  et  $\theta$  sont très petits et peuvent, dans le calcul, être considérés comme des infiniment petits du premier ordre.

Quant aux vitesses vibratoires, nous n'aurons à en considérer que la composante  $u$  selon  $ox$ .

### 1.1.2. Conditions à la limite

Les conditions à la limite doivent, selon nos hypothèses, exprimer que les relations (1.1.4) à (1.1.7), qui régissent l'onde de choc, sont con-

servées en présence d'oscillations d'origine acoustique.

Par différentiation de (1.1.4), (1.1.5) et (1.1.6) nous obtenons:

$$\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0 = -\delta\xi/\xi, \quad (1.1.16)$$

$$\theta_1 - \theta_0 = -2 \frac{\Gamma'}{\Gamma} \delta\xi = 2\xi \frac{\Gamma'}{\Gamma} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0), \quad (1.1.17)$$

$$s_1 - s_0 = -\frac{R'}{R} \delta\xi = \xi \frac{R'}{R} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0). \quad (1.1.18)$$

Pour obtenir, à partir de (1.1.7), une expression correcte il faut prendre quelques précautions. On pourrait être tenté — nous l'avons été — d'admettre, comme il est usuel en acoustique, que la présence des ondes acoustiques ne modifie pas les vitesses du son  $c_0$  et  $c_1$ .

Cette approximation reste correcte à l'intérieur des régions  $E_0$  et  $E_1$ , mais à leur frontière elle ne peut être admise: la relation (1.1.5) s'y oppose. On doit donc différentier (1.1.7) en admettant que  $c_0$  est variable. Il vient alors:

$$\delta U = c_0 \delta Y + Y \delta c_0 \quad (1.1.19)$$

avec  $\delta U = u_1 - u_0$ , différence entre les composantes  $u_1$  et  $u_0$  des vitesses vibratoires

$$\delta Y = Y' \delta\xi = -\xi Y' (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0).$$

D'autre part,  $c_0$  est donné par la relation classique:

$$c_0^2 = \gamma P_0 / \varrho_0$$

d'où:

$$2 \delta c_0 / c_0 = \delta P_0 / P_0 - \delta \varrho_0 / \varrho_0 = \bar{\omega}_0 - s_0.$$

Comme nous le montrerons plus loin, dans notre problème, il ne peut exister dans la région  $E_0$  que des ondes acoustiques incidentes. Le phénomène oscillant est donc adiabatique, ce qui nous permet d'écrire  $s_0 = \bar{\omega}_0 / \gamma$ , d'où:

$$\delta c_0 / c_0 = \bar{\omega}_0 / (\mu + 1).$$

La relation (1.1.19) peut alors s'écrire:

$$\frac{u_1 - u_0}{c_0} = \left( \frac{Y}{\mu + 1} + \xi Y' \right) \bar{\omega}_0 - \xi Y' \bar{\omega}_1 \quad (1.1.20)$$

qu'il sera commode d'utiliser sous la forme:

$$c_1 u_1 - G \frac{c_1^2}{\gamma} \bar{\omega}_1 = \frac{1}{\Gamma} \left( c_0 u_0 - H \frac{c_0^2}{\gamma} \bar{\omega}_0 \right). \quad (1.1.21)$$

$\Gamma$ ,  $G$ ,  $H$  étant les fonctions définies respectivement par les relations (1.1.5), (1.1.13), (1.1.14).

## 1.2. Ondes de faible amplitude dans les gaz

### 1.2.0. Mise en équation

La mise en équation de ce problème résulte des travaux de STOKES et KIRCHHOFF. On en trouve

un exposé dans l'ouvrage de Lord RAYLEIGH (Theory of Sound, Vol. II., § 247). Nous le résumons avec nos notations.

$u, v, w$	= composantes de la vitesse d'une particule,
$\varrho$	= masse spécifique du gaz au repos,
$s = \delta\varrho/\varrho$	= condensation,
$P$	= pression du gaz au repos
$\bar{\omega} = \delta P/P$	= excès relatif de pression,
$T$	= température absolue du gaz au repos,
$\theta = \delta T/T$	= excès relatif de température,
$\gamma$	= rapport des chaleurs spécifiques,
$\nu$	= coefficient de viscosité cinématique,
$k$	= coefficient de conductibilité thermique égal, selon KIRCHHOFF, à $5\nu/2$ ,
$c$	= vitesse du son.

Equation de continuité:

$$\partial s / \partial t + \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0. \quad (1.2.1)$$

Equations dynamiques:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} = \nu \left( \Delta^2 u - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} \right), \text{ et cycl. en } y, z \quad (1.2.2)$$

La dérivation logarithmique de l'équation  $P = \varrho r T$  donne l'équation d'état:

$$\bar{\omega} = s + \theta \quad (1.2.3)$$

Les mouvements étant très petits on néglige les termes du second ordre. L'excès relatif de température total  $\theta$  est la somme de l'excès  $\theta_a$  résultant de la compression adiabatique et de l'excès  $\theta_t$  provenant de la conductibilité. Or, on a:

$$\theta_a = (\gamma - 1) s, \quad \partial \theta_t / \partial t = k \Delta^2 \theta.$$

D'où finalement l'équation thermique:

$$\partial \theta / \partial t = (\gamma - 1) \partial s / \partial t + k \Delta^2 \theta. \quad (1.2.4)$$

Le calcul se conduit alors comme suit: on élimine  $\bar{\omega}$  en utilisant (1.2.3). On suppose ensuite que les diverses variables ne dépendent du temps que par le facteur  $e^{ht}$  ( $h$  pouvant être complexe). Le facteur  $h$  remplace donc le signe de dérivation par rapport au temps.

Les équations (1.2.1), (1.2.2) et (1.2.4) s'écrivent alors:

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z + h s = 0, \quad (1.2.1')$$

$$h u - \nu \Delta^2 u = -\partial M / \partial x, \text{ et cycl. en } y, z, \quad (1.2.2')$$

$$h \theta - k \Delta^2 \theta = (\gamma - 1) h s \quad (1.2.4')$$

où l'on a posé:

$$M = (c^2/\gamma + h\nu/3) s + (c^2/\gamma) \theta. \quad (1.2.5)$$

On élimine  $s$  entre (1.2.1') et (1.2.4'), ce qui donne:

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = -(h\theta - k\Delta^2\theta)/(\gamma - 1) \quad (1.2.6)$$



et  $M$  s'écrit

$$M = \frac{c^2}{\gamma - 1} \left[ \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{h \nu}{c^2} \right) \theta - \frac{k}{h \gamma} \left( 1 + \frac{\gamma}{3} \frac{h \nu}{c^2} \right) \Delta^2 \theta \right] \tag{1.2.5'}$$

Différentions les équations (1.2.2') respectivement par rapport à  $x, y, z$  et ajoutons membre à membre. Tenons compte de (1.2.6) et éliminons  $M$  en utilisant (1.2.5'), il reste:

$$\frac{h^2 \theta}{c^2} - \left( 1 + \frac{h k}{c^2} + \frac{4}{3} \frac{h \nu}{c^2} \right) \Delta^2 \theta + \frac{k}{h \gamma} \left( 1 + \frac{4 \gamma}{3} \frac{h \nu}{c^2} \right) \Delta^4 \theta = 0 \tag{1.2.7}$$

dont une solution particulière est donnée par la forme:

$$\theta = B_1 Q_1 + B_2 Q_2, \tag{1.2.8}$$

où  $B_1, B_2$  sont des constantes,  $Q_1$  et  $Q_2$  des fonctions de  $x, y, z$  satisfaisant aux relations:

$$\Delta^2 Q_1 = m_1^2 Q_1, \quad \Delta^2 Q_2 = m_2^2 Q_2 \tag{1.2.9}$$

dans lesquelles  $m_1^2$  et  $m_2^2$  sont déterminés par l'équation:

$$\left( \frac{h}{m c} \right)^4 - \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4 \nu}{3 k} \right) \sigma \right] \left( \frac{h}{m c} \right)^2 + \sigma \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{4 \nu}{3 k} \right) \sigma = 0 \tag{1.2.10}$$

$\sigma$  étant le nombre sans dimension

$$\sigma = h k / c^2. \tag{1.2.11}$$

Les composantes  $u, v, w$  de la vitesse vibratoire dérivent alors, au facteur commun  $e^{h t}$  près, du potentiel  $Q_1 + Q_2$ . Les constantes  $B_1$  et  $B_2$  se tirent de (1.2.6) qui donne:

$$B_i = (\gamma - 1) \frac{m_i^2}{k m_i^2 - h} \quad (i = 1, 2). \tag{1.2.12}$$

La condensation  $s_i$  correspondant à  $Q_i$  est:

$$s_i = - (m_i^2 / h) \varphi_i e^{h t}. \tag{1.2.13}$$

L'excès relatif de pression  $\bar{\omega}_i$  s'obtient en combinant (1.2.3) et (1.2.13)

$$\bar{\omega}_i = - \frac{m_i^2}{h} \frac{k m_i^2 - \gamma h}{k m_i^2 - h} Q_i e^{h t}. \tag{1.2.14}$$

1.2.1. Simplifications, séparation des types d'onde, acoustiques et thermiques

Dans le cas où l'origine des ondes est acoustique, on aura  $h = i \omega - \delta$ . Or, dans la relation (1.2.10) qui détermine les rapports  $m/h$ ,  $h$  n'intervient que dans le nombre sans dimensions  $\sigma = h k / c^2$ . Lorsque ce nombre est très petit, les racines de (1.2.10) prennent des valeurs approchées très

simples. Dans l'air, en c.g.s.,  $\nu = 0,146$  donc  $k = 5 \nu / 2 = 0,365$ . Aux températures usuelles  $c$  est de l'ordre de  $34 \cdot 10^3$  cm/s. Enfin, les pulsations  $\omega$ , si on se limite supérieurement à la fréquence, déjà très ultrasonore, 80000 Hz, sont inférieures à  $0,5 \cdot 10^6$  s<sup>-1</sup>. Dans ces conditions  $k \omega / c^2 < 1,6 \cdot 10^{-4}$ .

Nous avons donc le droit de considérer que le nombre  $\sigma$  restera très petit tant que le facteur d'amortissement  $\delta$  ne sera pas très grand.

Nous ferons donc les simplifications correspondantes, sauf à vérifier, lorsqu'il y aura lieu, que la condition  $\sigma \ll 1$  est toujours respectée.

Les racines de (1.2.10) prennent alors les valeurs approchées

$$m_1^2 \approx (h/c)^2, \quad m_2^2 \approx \gamma h/k. \tag{1.2.15}, \tag{1.2.16}$$

La première nous donne une onde acoustique sous sa forme usuelle: Potentiel des vitesses. La seconde nous donne une onde de conductibilité thermique.

Dans le cas d'ondes planes, la coordonnée  $z$  étant éliminée par un choix convenable des axes, on pourra écrire:

$$Q_i = e^{\pm m_i (\alpha x + \beta y)} \tag{1.2.17}$$

avec, pour satisfaire à (1.2.9):  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

On obtient alors le tableau de valeurs suivantes:

	Onde acoustique	Onde thermique
$Q$	$e^{\pm h (\alpha x + \beta y) / c}$	$e^{\pm \sqrt{\gamma h / k} (\alpha x + \beta y)}$
$s$	$-(h/c^2) Q e^{h t}$	$-(\gamma/k) Q e^{h t}$
$\theta$	$-(\gamma - 1) s$	$-s$
$\bar{\omega}$	$\gamma s$	0
$u$	$\pm c \alpha s$	$\mp \sqrt{k h / \gamma} \alpha s$
$v$	$\pm c \beta s$	$\mp \sqrt{k h / \gamma} \beta s$

1.3. Tables numériques des diverses fonctions introduites dans le calcul

Tableau I

$\xi$	$\Gamma'$	$R$	$R'$	$Y$	$-\xi Y'$	$A_0$	$A_1$
1	1	1	0,714	0	0,714	1	1
0,9	0,985	0,93	0,735	0,0756	0,726	1,046	0,956
0,8	0,97	0,85	0,76	0,160	0,737	1,10	0,910
0,7	0,95	0,78	0,78	0,26	0,756	1,17	0,86
0,6	0,93	0,70	0,80	0,39	0,78	1,25	0,81
0,5	0,90	0,62	0,83	0,53	0,81	1,36	0,76
0,4	0,87	0,53	0,85	0,72	0,85	1,51	0,70
0,3	0,82	0,45	0,88	0,96	0,92	1,73	0,63
0,2	0,75	0,36	0,91	1,38	1,04	2,10	0,56
0,1	0,62	0,26	0,94	2,18	1,35	2,95	0,48
0,05	0,48	0,214	0,956	3,27	1,82	4,15	0,431
0,025	0,36	0,191	0,964	4,75	3,18	5,86	0,405
0	0	0,1667	0,973	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0,378

Tableau II

$\xi$	$J$	$1/R\Gamma$	$H$	$G$
1	0	1	1	1
0,9	0,0007	1,094	1,00035	1,00035
0,8	0,0031	1,21	1,00168	1,00165
0,7	0,0079	1,36	1,0052	1,0044
0,6	0,016	1,55	0,012	1,009
0,5	0,029	1,80	1,025	1,018
0,4	0,051	2,17	1,046	1,030
0,3	0,085	2,74	1,090	1,054
0,2	0,144	3,76	1,185	1,092
0,1	0,254	6,18	1,45	1,166
0,05	0,351	9,65	1,89	1,228
0,025	0,420	11,42	2,56	1,270
0	0,510	$\infty$	$\infty$	1,323

## 2. LES CONDITIONS CINÉMATIQUES

## 2.0. Position du problème et formules

2.0.0. Formes générales — Pulsation apparente  $\Omega$  et vitesse de phase  $w$  sur le front de l'onde de choc

Considérons dans une des régions  $E_0$  ou  $E_1$  un champ acoustique incident sur S, que nous représenterons par le potentiel des vitesses

$$\Phi(r, y, z, t). \quad (2.0.1)$$

$\Phi$  et  $x$  étant affectés de l'indice (0 ou 1) correspondant à la région en cause.

Sur le front S ce champ produit un phénomène qui, par rapport aux axes  $o X y z$  liés à S sera régi par la forme:

$$\Psi(y, z, t) = \Phi(a t, y, z, t) \quad (2.0.2)$$

où  $a$  est affecté du même indice que  $\Phi$ .

Du fait que nos conditions aux limites sont ponctuelles, il résulte que, à tout champ associé au champ incident par réflexion ou réfraction, doit correspondre sur S un phénomène dont la distribution spatiale et l'évolution dans le temps sont régis par la forme  $\Psi$ . Cette condition d'ordre cinématique est indépendante des conditions dynamiques qui dérivent d'un choix particulier des équations qui relient les valeurs de  $\bar{\omega}$ ,  $s$ ,  $u$ ,  $\theta$ , prises de part et d'autre de S.

Comme nous nous limitons au cas où l'onde incidente est plane, progressive et uniforme, nous aurons:

$$\Phi = e^{i\omega[t - (x \cos \varphi + y \sin \varphi)/c]}, \quad (2.0.3)$$

$\varphi$  étant l'angle d'incidence.

La fonction  $\Psi$  qui représente le phénomène sur S prend alors la forme:

$$\Psi = e^{i\Omega(t - y/w)} \quad (2.0.4)$$

avec

$$\frac{\Omega}{\omega} = 1 - A \cos \varphi = \frac{1 - A + (1 + A) \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad (2.0.5)$$

$$\frac{w}{c} = \frac{\Omega}{\omega \sin \varphi} = \frac{1 - A \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1 - A + (1 + A) \tau^2}{2 \tau} \quad (2.0.6)$$

où l'on a posé

$$\tau = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi.$$

$c$ ,  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\tau$  doivent être affectés de l'indice de la région qui contient l'onde.

## 2.0.1. Condition pour qu'une onde acoustique plane, progressive et uniforme soit une onde incidente

Considérons un mobile M entraîné par les ondes et cheminant sur un rayon sonore. Si, lorsque  $t$  croît, M se rapproche du plan S, l'onde est incidente. S'il s'en éloigne, l'onde est réfléchie ou réfractée.

Par rapport aux axes liés au fluide dans la région considérée la vitesse avec laquelle M se déplace vers les  $x$  croissants est  $c \cos \varphi$ .

Dans la région en dépression  $E_0$ , la distance de M à S est, à une constante près  $(c_0 \cos \varphi_0 - a_0)t$ .

Elle décroît donc constamment quel que soit  $\varphi_0$ , puisque l'on a  $a_0 > c_0$ . Par suite, toute onde plane, progressive et uniforme existant dans  $E_0$  est une onde incidente.

Dans la région en compression  $E_1$  la distance de M à S est, à une constante près,  $(a_1 - c_1 \cos \varphi_1)t$ .

Or,  $a_1 < c_1$ . Deux cas se présentent donc:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_1 - c_1 \cos \varphi_1 < 0 \text{ soit } |\varphi_1| < \arccos A_1 \\ \text{ou } |\tau_1| < \sqrt{(1 - A_1)/(1 + A_1)}. \end{aligned} \quad (2.0.7)$$

L'onde est incidente.

$$\begin{aligned} \text{b) } a_1 - c_1 \cos \varphi_1 > 0 \text{ soit } \arccos A_1 < |\varphi_1| < \pi \\ \text{ou } |\tau_1| > \sqrt{(1 - A_1)/(1 + A_1)}. \end{aligned} \quad (2.0.8)$$

L'onde est engendrée par réflexion ou réfraction.

## 2.0.2. Relations générales

Les ondes planes, qu'elles soient acoustiques ou thermiques, sont régies par une forme:

$$e^{h t - m(\alpha x + \beta y)} \quad (2.0.9)$$

avec

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{et } m = \pm h/c \quad & \text{ondes acoustiques,} \\ m = \pm \sqrt{\gamma h/k} \quad & \text{ondes thermiques.} \end{aligned} \quad (2.0.10)$$

Sur le plan S qui se déplace, dans la région considérée, à la vitesse  $a$ , l'exposant de (2.0.9) doit prendre la forme  $i\Omega(t - y/w)$ ; d'où les relations:

$$i\Omega = h - \alpha m a, \quad i\Omega/w = \beta m \quad (2.0.11)$$

c'est-à-dire

$$\alpha = (h - i\Omega)/a m, \quad \beta = i\Omega/w m \quad (2.0.12)$$



$\alpha^2 + \beta^2 = 1$  donne

$$(am/\Omega)^2 + (a/w)^2 - (h/\Omega - i)^2 = 0. \quad (2.0.13)$$

En remplaçant dans cette équation  $m$  par sa valeur tirée de l'une ou l'autre relation (2.0.10) on obtient une équation qui déterminera  $h$  en fonction de  $\Omega$  et  $w$ . On tire ensuite  $m$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  de (2.0.10) et (2.0.12).

## 2.1. L'onde thermique réfléchie ou réfractée

Portant dans (2.0.13) la valeur  $m^2 = \gamma h/k$  il vient:

$$(h/\Omega)^2 - 2(i + \gamma a^2/2k\Omega)h/\Omega - (1 - a^2/w^2) = 0 \quad (2.1.1)$$

d'où:

$$\frac{h}{\Omega} = i + \frac{\gamma a^2}{2k\Omega} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \left( \frac{2k\Omega}{\gamma a w} \right)^2 + 2i \frac{2k\Omega}{\gamma a^2}} \right]. \quad (2.1.2)$$

Pour nous convenir, la racine doit avoir une partie réelle négative: onde évanouissante lorsque  $t$  croît indéfiniment.

Or, nous l'avons vu, le nombre sans dimensions  $k\Omega/a^2$  est très petit. D'autre part, (2.0.6) donne  $\Omega/w = (\omega/c) \sin \varphi$  ( $\omega$ ,  $c$ ,  $\varphi$  affectés de l'indice de la région qui contient l'onde incidente).

Par suite,  $k\Omega/aw = (kw/ac) \sin \varphi$  est du même ordre de grandeur que  $k\Omega/a^2$ , c'est-à-dire très petit.

Prenant alors la valeur approchée du radical de la formule (2.1.2) on voit que la racine qui nous convient est celle où ce radical est affecté du signe négatif.

Pour obtenir une valeur approchée de  $h/\Omega$ , il faut développer le radical jusqu'aux termes du second ordre, les termes du premier ordre disparaissant, on obtient alors:

$$h = -\frac{k\Omega^2}{\gamma} \frac{a^2 + w^2}{a^2 w^2}. \quad (2.1.3)$$

On voit aisément que

$$\frac{kh}{c^2} = -\frac{1}{\gamma c^2} \frac{k^2 \Omega^2 (a^2 + w^2)}{a^2 w^2}$$

reste toujours très petit. L'approximation faite pour séparer l'onde thermique de l'onde acoustique est donc valable.

D'autre part (2.1.3) montre que  $h$  est réel et très petit. Par suite, l'onde thermique n'est pas sensiblement oscillante et son amortissement est lent.

De la valeur de  $h$  on tire:

$$m = i\Omega \sqrt{a^2 + w^2}/aw, \quad (2.1.4)$$

$$\alpha = -\frac{w}{\sqrt{a^2 + w^2}} = \cos \varphi_t, \quad (2.1.5)$$

$$\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + w^2}} = \sin \varphi_t.$$

La distribution spatiale des excès de température et des condensations est donc sinusoïdale. L'onde est oblique. Elle n'est pas progressive et s'éteint sur place.

Il en résulte qu'elle ne peut être engendrée que derrière le plan S (dont elle ne peut précéder le mouvement). Elle ne peut donc exister que dans la région en compression  $E_1$ .

L'absence de toute onde thermique dans la région  $E_0$  justifie donc la méthode par laquelle nous avons établi la condition aux limites (1.1.20).

Le potentiel  $Q = e^{-m(\alpha x + \beta y)}$  s'écrit alors:

$$Q = e^{i\Omega(x/a - y/w)}. \quad (2.1.6)$$

Les grandeurs liées à l'onde sont alors (voir 1.2.13):

$$s_t = -\frac{\gamma}{k} Q e^{ht}, \quad \theta_t = -s_t, \quad \bar{\omega}_t = 0,$$

et les composantes de la vitesse

$$u_t = -i \frac{k\Omega}{\gamma a} s_t, \quad v_t = i \frac{k\Omega}{\gamma w} s_t.$$

Ces valeurs nous seront utiles pour la simplification des conditions dynamiques.

## 2.2. L'onde acoustique réfléchie

Dans ce cas l'onde incidente est située, comme l'onde réfléchie, dans la région en surpression  $E_1$ . Les relations (2.0.5) et (2.0.6), qui lient les caractéristiques cinématiques  $\omega$  et  $\varphi$  (ou  $\tau$ ) de l'onde acoustique à la pulsation  $\Omega$  et la vitesse de phase  $w$  observables sur le front d'onde de choc sont valables à la fois pour l'onde incidente ( $\omega_1, \varphi_1, \tau_1$ ) et l'onde réfléchie ( $\omega'_1, \varphi'_1, \tau'_1$ ).

Eliminant  $\Omega$  et  $w$  on obtient:

$$\tau_1 \tau'_1 = (1 - A_1)/(1 + A_1), \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\omega'_1}{\omega_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi'_1} = \frac{(1 - A_1)^2 + (1 + A_1^2) \tau_1^2}{(1 - A_1)(1 + A_1)(1 + \tau_1^2)}. \quad (2.2.2)$$

(2.2.1) montre que, à l'onde incidente ( $\tau_1 < \sqrt{(1 - A_1)/(1 + A_1)}$  correspond bien une onde réfléchie [ $\tau'_1 > \sqrt{(1 - A_1)/(1 + A_1)}$ ].

(2.2.2) donne le rapport des pulsations (perçues par un observateur entraîné par le fluide) de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

Lorsque  $\varphi_1$  croît de 0 (incidence normale) à  $\arccos A_1$  (angle d'incidence limite)  $\tau_1$  croît de 0 à  $\sqrt{(1 - A_1)/(1 + A_1)}$ ,  $\omega'_1/\omega_1$  croît de  $(1 - A_1)/(1 + A_1)$  à 1.

On a donc toujours:

$$\frac{1 - A_1}{1 + A_1} < \frac{\omega'_1}{\omega_1} < 1, \quad \text{et} \quad 1 < \frac{\sin \varphi'_1}{\sin \varphi_1} < \frac{1 + A_1}{1 - A_1}.$$

Du fait que toute onde incidente plane, progressive et uniforme engendre une onde réfléchie de même type, la construction d'HUYGHENS est valable.

### 2.3. L'onde acoustique réfractée

#### 2.3.0. Généralités — Séparation des deux types d'ondes réfractées

Pour qu'il y ait réfraction il faut que l'onde incidente soit située dans la région en dépression  $E_0$ . D'autre part toute onde plane progressive et uniforme située dans  $E_0$  est une onde incidente et donnera lieu à la production d'ondes réfractées.

La vitesse de phase  $w$  du phénomène engendré sur  $S$  par l'onde incidente est donnée par (2.0.6):

$$w = \frac{(A_0 + 1)\tau_0^2 - (A_0 - 1)}{2\tau_0} c_0 \quad (2.3.1)$$

où  $A_0 > 1$ .

Lorsque l'angle d'incidence  $\varphi_0$  varie de  $-\pi$  à  $+\pi$ ,  $\tau_0$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .  $w$  croît constamment et sa variation est donnée par le tableau suivant:

$\varphi_0$	$-\pi$	$-\arccos 1/A_0$	0	$\arccos 1/A_0$	$+\pi$
$\tau_0$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{A_0-1}{A_0+1}}$	0	$+\sqrt{\frac{A_0-1}{A_0+1}}$	$+\infty$
$w$	$-\infty$	0	$+\infty - \infty$	0	$+\infty$

La même vitesse de phase  $w$  peut donc être produite par deux ondes dont les incidences sont comprises, l'une entre  $-\pi$  et 0, l'autre entre 0 et  $+\pi$ , l'une étant en valeur absolue supérieure à  $\arccos 1/A_0$ , l'autre inférieure à cette valeur. Les valeurs correspondantes de  $\tau$ ;  $\tau_0$  et  $\tau'_0$ , relatives à ces deux ondes, sont liées par la relation:

$$\tau_0 \tau'_0 = -(A_0 - 1)/A_0 + 1). \quad (2.3.2)$$

Enfin, (2.0.6) nous montre que les pulsations des deux ondes incidentes qui produisent sur  $S$  le même phénomène (égalité de  $w$  et de  $\Omega$ ) sont dans le rapport:

$$\omega'_0/\omega_0 = |\sin \varphi_0/\sin \varphi'_0|.$$

Ainsi, le phénomène acoustique observé sur  $S$ , et à fortiori à l'intérieur de la région  $E_1$  peut être engendré indifféremment par l'une ou l'autre, ou toute combinaison linéaire, des deux ondes incidentes ci-dessus. Aucune observation faite en  $E_1$  ne peut lever le doute.

La nature de l'onde réfractée dépend de la valeur absolue de la vitesse de phase  $w$ . Si  $|w| > \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$  l'onde réfractée est plane, progressive

et uniforme. Si  $|w| < \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$ , on ne peut lui faire correspondre dans  $E_1$  aucune onde plane, progressive et uniforme. L'onde réfractée prend alors une structure exponentielle et nous la nommerons *onde d'accompagnement*.

Les angles d'incidence  $\varphi_0$  correspondant à la valeur de  $w$  pour laquelle on passe de l'un à l'autre type d'onde réfractée sont donnés par:

$$\tau_0 = \frac{\pm \sqrt{c_1^2 - a_1^2} \pm \sqrt{c_1^2 - a_1^2 + a_0^2 - c_0^2}}{a_0 + c_0}. \quad (2.3.3)$$

Lorsque  $|\tau_0|$  est extérieur à l'intervalle défini par les limites ci-dessus, l'onde réfractée est plane, progressive et uniforme. Dans le cas contraire on obtient l'onde d'accompagnement.

Exprimées en fonction des relations théoriques qui régissent l'onde de choc, les deux valeurs limites de  $\tau_0$  s'écrivent:

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{\mu(1-\xi)}{\mu+\xi}} \cdot \frac{\pm \sqrt{1+\mu\xi} \pm \sqrt{(\mu+1)(1+\xi)}}{\sqrt{\mu+\xi} + \sqrt{(\mu+1)\xi}}. \quad (2.3.4)$$

Les valeurs des angles limites correspondants sont données dans la Fig. 1.

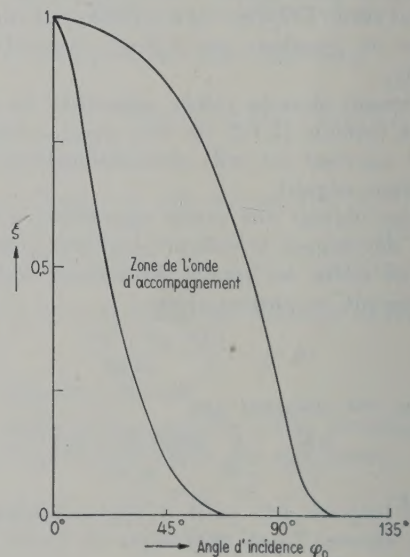


Fig. 1.

#### 2.3.1. Onde réfractée plane, progressive et uniforme: $w^2 > c_1^2 - a_1^2$

L'équation (2.0.6) appliquée aux deux régions  $E_0$  et  $E_1$  qui contiennent respectivement l'onde incidente et l'onde réfractée donne la relation qui lie  $\tau_0$  et  $\tau_1$ :

$$\frac{c_1 - a_1 + (c_1 + a_1)\tau_1^2}{\tau_1} = \frac{c_0 - a_0 + (c_0 + a_0)\tau_0^2}{\tau_0}. \quad (2.3.5)$$



$\tau_0$  étant imposé par l'incidence  $\varphi_0$ ,  $\tau_1$  est déterminé par une équation du second degré dont seule la racine supérieure à  $\sqrt{(c_1 - a_1)/(c_1 + a_1)}$  correspond à l'onde réfractée. L'autre racine donne dans  $E_1$  l'onde incidente qui pourrait par réflexion engendrer la première.

On a donc:

$$\tau_1 = \frac{c_0 - a_0 + (c_0 + a_0) \tau_0^2 + \sqrt{[c_0 - a_0 + (c_0 + a_0) \tau_0^2]^2 - 4(c_1^2 - a_1^2) \tau_0^2}}{2(c_1 + a_1) \tau_0} \quad (2.3.6)$$

qu'on peut écrire en utilisant les fonctions sans dimension  $A_0, A_1, \Gamma$ ,

$$\tau_1 = \frac{1 - A_0 + (1 + A_0) \tau_0^2 + \sqrt{[(1 - A_0) + (1 + A_0) \tau_0^2]^2 - \frac{4}{\Gamma^2} (1 - A_1^2) \tau_0^2}}{2 \frac{1 + A_1}{\Gamma} \tau_0} \quad (2.3.6')$$

La valeur de la pulsation  $\omega_1$  de l'onde réfractée, perçue par un observateur qu'entraîne le fluide dans la région  $E_1$  est alors donnée par (2.0.6) d'où l'on tire:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1} \quad (2.3.7)$$

Pour un observateur lié aux axes qu'entraîne le fluide situé en  $E_0$  il y a glissement de fréquence et la pulsation perçue sera  $\omega'_1$ .

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1 \left( 1 + \frac{U}{c_1} \cos \varphi_1 \right) \\ &= \left( 1 + \frac{Y}{\Gamma} \cos \varphi_1 \right) \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi_1} \frac{\omega_0}{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

### 2.3.2. L'onde acoustique d'accompagnement $w^2 < c_1^2 - a_1^2$

Nous allons montrer que l'onde réfractée peut alors être représentée par un potentiel des vitesses de la forme:

$$\Phi_1 = e^{(i\omega_1 - \delta_1)t + \{i(\eta + \zeta)x + (i\eta' + \zeta')y\}/c_1} \quad (2.3.9)$$

$\Phi_1$  doit satisfaire à l'équation générale du son  $\Delta^2 \Phi_1 = (1/c_1^2) \partial^2 \Phi_1 / \partial t^2$  ce qui entraîne les relations:

$$\zeta^2 - \eta^2 + \zeta'^2 - \eta'^2 = \delta_1^2 - \omega_1^2, \quad \zeta \eta + \zeta' \eta' = -\delta_1 \omega_1. \quad (2.3.10)$$

D'autre part, sur le front S, c'est-à-dire pour  $x = a_1 t$ , l'exposant de  $\Phi_1$ , doit prendre la forme  $i\Omega(t - y/w)$ , d'où:

$$i\omega_1 - \delta_1 + \frac{a_1}{c_1} (i\eta + \zeta) = i\Omega, \quad \frac{i\eta' + \zeta'}{c_1} = -i \frac{\Omega}{w}. \quad (2.3.11)$$

De (2.3.10) et (2.3.11) on tire alors:

$$\omega_1 / \Omega = 1 / (1 - A_1^2), \quad (2.3.12)$$

$$\frac{\delta}{\Omega} = \frac{A_1}{1 - A_1^2} \sqrt{\left(\frac{c_1}{w}\right)^2 (1 - A_1^2) - 1}, \quad (2.3.13)$$

$$\eta / \Omega = -A_1 / (1 - A_1^2) = -A_1 \omega_1 / \Omega, \quad (2.3.14)$$

$$\frac{\zeta}{\Omega} = \frac{1}{A_1} \frac{\delta}{\Omega}, \quad (2.3.15)$$

$$\eta' / \Omega = -c_1 / w, \quad (2.3.16)$$

$$\zeta' = 0 \quad (2.3.17)$$

L'éq. (2.3.13) montre que ce type d'onde n'existe que si la vitesse de phase  $w$  est inférieure à  $c_1 \sqrt{1 - A_1^2} = \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$ ; par suite, cette onde n'apparaît que dans le cas étudié au présent paragraphe. D'autre part, cette condition d'existence implique que l'on a  $c_1 > a_1$ . Aucune onde de ce type ne peut donc apparaître dans la région  $E_0$  où  $c_0 < a_0$ .

Avant de décrire l'onde d'accompagnement nous devons vérifier que la condition  $\sigma \ll 1$  est satisfaite, c'est-à-dire que nous avons toujours  $k\delta/c_1^2 \ll 1$ . Remplaçant dans (2.3.13)  $\Omega$  par sa valeur tirée de (2.0.6), nous obtenons:

$$\frac{k\delta}{c_1^2} = A_1 \Gamma \frac{\sqrt{1 - A_1^2 - (w/c_1)^2}}{1 - A_1^2} \sin \varphi_0 \frac{k\omega}{c_0^2} \quad (2.3.18)$$

$k\omega/c_0^2$  est très petit;  $A_1$  et  $\Gamma$  sont compris entre 0 et 1, on a donc  $k\delta/c_1^2$  très petit.

Pour mettre en évidence les propriétés de l'onde nous prendrons des axes  $oXY$  dont l'origine  $o$  est entraînée par le plan S et se déplace vers les  $y$  croissants à la vitesse  $w$ . Nous posons donc:

$$X = x_1 - a_1 t, \quad Y = y - w t. \quad (2.3.19)$$

Le potentiel  $\Phi_1$ , prend alors la forme, indépendante de  $t$ :

$$\Phi_1 = e^{[(i\eta + \zeta)X + i\eta'Y]/c_1} \quad (2.3.20).$$

L'onde est donc immobile par rapport aux axes  $oXY$ . Son amplitude décroît comme  $e^{\zeta X/c_1}$  lorsqu'on s'éloigne de l'onde de choc (vers les  $x$  négatifs). Elle constitue donc un phénomène qui court derrière l'onde de choc tout en glissant transversalement à la vitesse  $w$ . Ces propriétés justifient le nom d'onde d'accompagnement que nous lui avons donné.

Précisons sa structure. Vers les  $Y$  croissants le phénomène est spatialement périodique et sa



longueur d'onde est:

$$\lambda_Y = 2\pi c_1/\eta' = 2\pi w/\Omega \quad (2.3.21)$$

ce qui était d'ailleurs évident étant donné son origine. Vers les  $X$  décroissants le phénomène est spatialement pseudopériodique amorti. Sa longueur d'onde est:

$$\lambda_X = 2\pi c_1/\eta = 2\pi (c_1^2 - a_1^2)/a_1 \Omega. \quad (2.3.22)$$

Les plans d'égale phase, ou pseudo-plans d'onde sont donnés par:  $\eta X + \eta' Y = \text{const.}$  Ils font donc avec le plan  $S$  de l'onde de choc l'angle  $\chi$  donné par:

$$\text{tg } \chi = -\eta'/\eta = -(c_1^2 - a_1^2)/a_1 w \quad (2.3.23)$$

formule qui permet d'en donner une construction géométrique très simple.

Le taux d'amortissement de l'onde vers les  $X$  négatifs est:

$$\frac{\zeta}{c_1} = \frac{c_1 \Omega}{c_1^2 - a_1^2} \sqrt{\frac{c_1^2 - a_1^2}{w^2} - 1}. \quad (2.3.24)$$

Il est nul pour les valeurs limites  $w = \pm \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$ . Il croît lorsque  $w$  diminue.

Pour  $w = 0$ , on a d'une part:  $\Omega = 0$ , d'autre part:

$$\Omega/w = \omega_0 \sin \varphi_0 / c_0 \quad \text{et} \quad \cos \varphi_0 = c_0 / a_0.$$

$\zeta_1/c_1$  prend alors la valeur:

$$\left(\frac{\zeta_1}{c_1}\right)_{w=0} = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - a_1^2}} \cdot \frac{\sqrt{a_0^2 - c_0^2}}{a_0} \cdot \frac{\omega_0}{c_0},$$

qu'on peut exprimer en fonction de la variable  $\xi$  qui définit l'amplitude de l'onde de choc, et de la longueur d'onde  $\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega_0$  de l'onde incidente dans la région  $E_0$ :

$$\left(\frac{\zeta_1}{c_1}\right)_{w=0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\mu+1}{\mu+\xi}}. \quad (2.3.25)$$

Pour calculer les caractéristiques de l'onde d'accompagnement à partir de celles de l'onde incidente il suffit, dans les relations (2.3.12) à (2.3.16), de remplacer  $\Omega$  et  $w$  par leurs valeurs tirées de (2.0.5) et (2.0.6), savoir:

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega_0 (c_0 - a_0 \cos \varphi_0) / c_0, \\ w &= (c_0 - a_0 \cos \varphi_0) / \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Les formules obtenues sont compliquées. Il est inutile de les écrire explicitement ici.

## 2.4. Constructions géométriques

### 2.4.0. Construction d'Huyghens (Fig. 2)

Le plan de la figure étant immobile par rapport au milieu en dépression  $E_0$ ,  $S$  et  $S'$  sont les positions du front d'onde de choc aux époques  $t=0$  et  $t=1$ . La distance  $SS'$  est  $a_0$ .

Considérons dans le milieu  $E_0$ , à droite de  $S$ , une onde plane, progressive et uniforme qui, à l'époque  $t=0$ , coupe  $S'$  au point  $O_0$ . A l'époque  $t=1$  cette onde coupera  $S'$  en un point  $D$ , et son prolongement virtuel sera tangent à un cercle  $C_0$ , de rayon  $c_0$  et de centre  $O_0$ , entièrement situé à gauche de  $S'$  puisque  $c_0 < a_0$ .

Soit  $B$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $O_0$  sur  $S'$ .  $BD$  sera égal à la vitesse de phase  $w$  observée sur le front de l'onde de choc.

Or, on peut toujours faire passer par  $D$  deux tangentes au cercle  $C_0$ . La figure confirme donc qu'il existe dans la région  $E_0$  deux ondes  $I_0, I_0'$  auxquelles correspond sur  $S$  la même vitesse de phase  $w$ . Ces deux ondes sont incidentes puisque le point de contact des tangentes menées de  $D$  à  $C_0$  est à gauche de  $S$ : région où  $E_0$  est virtuel.

Considérons maintenant la région  $E_1$ . Le fluide s'y écoule vers la droite avec la vitesse  $U$ . Une onde plane passant à l'époque  $t=0$  par le point  $O_0$  sera, à l'époque  $t=1$ , tangente à un cercle  $C_1$  de rayon  $c_1$  et dont le centre  $O_1$  est à la distance  $O_0 O_1 = U$  de  $O_0$ .

$O_1 B$  est alors la vitesse  $a_1$  du front d'onde de choc par rapport au fluide emplissant la région  $E_1$ . Or  $a_1 < c_1$ , par suite le cercle  $C_1$  coupe la droite  $S'$  en deux points  $F$  et  $F'$ .

Les ondes incidentes  $I_1$  sont celles dont le point de contact avec  $C_1$  est à droite de  $S'$  (là où  $E_1$  est virtuel) les ondes réfléchies ou réfractées touchent  $C_1$  à gauche de  $S'$ .

Soit maintenant  $D$  un point de  $S'$  situé à l'extérieur du segment  $FF'$ . De ce point on peut mener deux tangentes à  $C_1$  dont l'une correspond à une onde incidente  $I_1$ , l'autre à une onde réfléchie ou réfractée  $R_1$ .

Ainsi, si l'on se donne une onde  $R_1$  dans  $E_1$ , cette onde détermine le point  $D$ , et on voit qu'elle peut avoir été engendrée soit par réflexion de l'onde  $I_1$  (située dans  $E_1$ ), soit par réfraction de l'une ou l'autre des ondes  $I_0, I_0'$  situées dans  $E_0$ .

Enfin, il apparaît que lorsque le point  $D$  se trouve entre  $F$  et  $F'$  il lui correspond encore deux ondes incidentes possibles  $I_0, I_0'$  dans  $E_0$ , mais rien dans  $E_1$  puisque  $D$  est à l'intérieur du cercle  $C_1$ .

Les secteurs hachurés de la figure montrent les angles d'incidences  $\varphi_0$  pour lesquels cette condition est réalisée. La construction d'HUYGHENS ne nous permet pas alors de connaître ce qui se passe dans la région  $E_1$ .

### 2.4.1. Construction de l'onde d'accompagnement (Fig. 2)

La formule (2.3.23) donne l'angle  $\chi$  que fait le pseudo-plan d'onde (plan d'égale phase) de l'onde





## 3. CONDITIONS DYNAMIQUES

## 3.0. Elimination des ondes thermiques

Partons des relations établies au paragraphe 1.1.2, savoir:

$$\theta_1 - \theta_0 = 2\xi \frac{F'}{F} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0), \quad (1.1.17)$$

$$s_1 - s_0 = \xi \frac{R'}{R} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0), \quad (1.1.18)$$

$$c_1 u_1 - G \frac{c_1^2 \bar{\omega}_1}{\gamma} = \frac{1}{F} \left( c_0 u_0 - H \frac{c_0^2 \bar{\omega}_0}{\gamma} \right). \quad (1.1.21)$$

Nous avons vu que, dans notre problème, la région en dépression  $E_0$  ne peut contenir que des ondes incidentes, représentables par le potentiel des vitesses:

$$\Phi = e^{i\omega_0 [t - (x_0 \cos \varphi_0 + y_0 \sin \varphi_0)/c_0]}. \quad (3.0.1)$$

On aura donc:

$$\begin{aligned} s_0 &= -i(\omega_0/c_0^2) \Phi_0, \\ \bar{\omega}_0 &= \gamma s_0 = -i\gamma (\omega_0/c_0^2) \Phi_0, \\ \theta_0 &= (\gamma - 1) s_0 = -i(\gamma - 1) (\omega_0/c_0^2) \Phi_0, \\ u_0 &= -i(\omega_0/c_0) \cos \varphi_0 \Phi_0 = c_0 \cos \varphi_0 \cdot s. \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

Dans la région  $E_1$  il y a superposition d'un phénomène acoustique (lettres affectées de l'indice 1a) et d'un phénomène thermique (indice 1t).

Les formules (2.1.7) nous donnent pour le phénomène thermique

$$\bar{\omega}_{1t} = 0, \quad \theta_{1t} = -s_{1t}, \quad u_{1t} = -i(k\Omega/\gamma a_1) s_{1t}, \quad (3.0.3)$$

Dans le phénomène acoustique nous avons:

$$\bar{\omega}_{1a} = \gamma s_{1a} \quad (3.0.4)$$

et au total:  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_{1t} + \bar{\omega}_{1a} = \bar{\omega}_{1a}$ ,  $\theta_1 = \theta_{1t} + \theta_{1a}$ ,  $s_1 = s_{1t} + s_{1a}$ ,  $u_1 = u_{1t} + u_{1a}$ .

L'équation (1.1.18) donne alors:

$$s_{1t} = -\gamma J (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0) \quad (3.0.5)$$

où  $J$  est la fonction définie par la formule (1.1.11).

Cette relation nous donnera l'onde thermique lorsque nous aurons calculé l'onde acoustique.

Portant cette valeur de  $s_{1t}$  dans la troisième relation (3.0.3), nous avons:

$$u_{1t} = i(k\Omega/a_1) J (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0) \quad (3.0.6)$$

que nous portons dans (1.1.21), qui devient:

$$\begin{aligned} c_1 u_{1a} - \left( G - i \frac{k\Omega}{a_1 c_1} \gamma J \right) \frac{c_1^2 \bar{\omega}_1}{\gamma} &= \frac{1}{F} \left[ c_0 u_0 - \left( H - i \frac{k\Omega}{a_1 c_0} \gamma J \right) \frac{c_0^2 \bar{\omega}_0}{\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (3.0.7)$$

Or, nous savons que les nombres  $k\Omega/a_1 c_1$  et  $k\Omega/a_1 c_0$  sont très petits. D'autre part, le Tableau II du Chapitre 1 nous montre que la fonction  $J$  est toujours inférieure aux fonctions  $G$  et  $H$ . Par suite, dans l'équation (3.0.7) nous pouvons négliger les termes imaginaires, c'est-à-dire les termes provenant de l'onde thermique.

Il nous reste donc une condition qui n'intéresse que les ondes acoustiques existant de part et d'autre du front  $S$  de l'onde de choc.

$$c_1 u_{1a} - G \frac{c_1^2 \bar{\omega}_1}{\gamma} = \frac{1}{F} \left( c_0 u_0 - H \frac{c_0^2 \bar{\omega}_0}{\gamma} \right). \quad (3.0.8)$$

## 3.1 L'onde réfléchie

Nous avons à considérer dans la région  $E_1$  deux ondes, l'une incidente, l'autre réfléchie, représentées par leurs potentiels des vitesses,

$$\Phi_1 = B_1 e^{i\omega_1 [t - (x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1)/c_1]}, \quad (3.1.1)$$

$$\Phi'_1 = B'_1 e^{i\omega'_1 [t - (x_1 \cos \varphi'_1 + y_1 \sin \varphi'_1)/c_1]}. \quad (3.1.2)$$

D'autre part, la région  $E_0$  ne contient aucune onde. Le second membre de la condition (3.0.8) est donc nul.

Supposant les conditions cinématiques satisfaites (3.0.8), donne alors:

$$B_1 \omega_1 (\cos \varphi_1 - G) + B'_1 \omega'_1 (\cos \varphi'_1 - G) = 0. \quad (3.1.3)$$

L'amplitude des ondes est proportionnelle aux facteurs  $B\omega$ . Le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie à l'amplitude de l'onde incidente, c'est-à-dire le coefficient  $R$  de réflexion des amplitudes, est alors:

$$R = -(\cos \varphi_1 - G)/(\cos \varphi'_1 - G). \quad (3.1.4)$$

Reportons-nous à la relation cinématique (2.2.1) qui lie les tangentes  $\tau_1$ ,  $\tau'_1$  des demi-angles  $\frac{1}{2} \varphi_1$ ,  $\frac{1}{2} \varphi'_1$ , nous pouvons éliminer  $\varphi'_1$ , et il vient:

$$R = \frac{\left( \frac{1-A_1}{1+A_1} \right)^2 + \tau_1^2}{1 + \tau_1^2} \frac{1-G}{1+G} - \tau_1^2 \frac{\left( \frac{1-A_1}{1+A_1} \right)^2 - \frac{1-G}{1+G}}{\tau_1^2} \quad (3.1.5)$$

avec  $\tau_1^2 < (1-A_1)/(1+A_1)$  (onde incidente).

Pour  $\varphi_1 = 0$ ,  $\tau_1 = 0$  (incidence normale)  $R_0 = (1-G)/(1+G)$ , négatif car  $G > 1$  (voir Tableau II, Chapitre 1).

Pour  $\varphi_1 = \arccos A_1$ ,  $\tau_1 = \pm \sqrt{(1-A_1)/(1+A_1)}$  (incidence limite).  $R_{\text{lim.}} = -1$ .

Comme, en ce cas, on a  $\varphi'_1 = \varphi_1$ ,  $\omega'_1 = \omega_1$ , cette valeur signifie que, dans la région où les deux ondes se superposent (et qui, d'ailleurs, est évanouissante) leur somme est nulle. En d'autres termes, le phénomène ne comporte qu'une onde



acoustique incidente qui s'arrête sur S ce qui est bien le cas.

Le coefficient de réflexion des amplitudes est donc constamment négatif, et, en valeur absolue, croît de  $(G-1)/(G+1)$  à 1 quand  $\varphi_1$  croît de 0 à  $\arccos A_1$ .

L'onde réfléchie ne sera donc pratiquement observable sous des incidences voisines de la normale que si l'onde de choc est intense ( $G$  nettement supérieur à 1).

3.2. L'onde réfractée progressive

Représentons l'onde incidente, située dans  $E_0$ , par son potentiel des vitesses

$$\Phi_0 = B_0 e^{i\omega_0 [\ell - (x_0 \cos \varphi_0 + y_0 \sin \varphi_0)/c_0]}$$

et l'onde réfractée, située dans  $E_1$ , par

$$\Phi_1 = B_1 e^{i\omega_1 [\ell - (x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1)/c_1]}$$

Dès l'instant que les conditions cinématiques sont satisfaites les exposants des exponentielles sont les mêmes sur S. La condition dynamique (3.0.8) donne alors:

$$\Gamma B_1 \omega_1 (\cos \varphi_1 - G) = B_0 \omega_0 (\cos \varphi_0 - H). \tag{3.2.1}$$

Nous comparerons les amplitudes des pressions acoustiques dans les deux ondes, c'est-à-dire que nous formerons le rapport:

$$R = P_1 \overline{\omega_1} / P_0 \overline{\omega_0} = \varrho_1 B_1 \omega_1 / \varrho_0 B_0 \omega_0$$

dont (3.2.1) donne la valeur:

$$R = \frac{1}{\Gamma \Gamma} \frac{H - \cos \varphi_0}{G - \cos \varphi_1} \tag{3.2.2}$$

où  $R = \varrho_0 / \varrho_1$  et

$$\frac{1}{\Gamma \Gamma} = \sqrt{\frac{\mu + \xi}{\xi(1 + \mu \xi)}} = \frac{\Gamma}{\xi}$$

(voir Tableau II, Chapitre 1).

Pour calculer  $R$  il faudra se reporter aux conditions cinématiques donnant  $\varphi_1$ , en fonction de  $\varphi_0$ .

Nous donnerons seulement ci-dessous les valeurs  $R$  en fonction de  $\xi$  pour  $\varphi_0 = 0$  (onde incidente parallèle à l'onde de choc et fuyant devant cette dernière) et  $\varphi_0 = \pi$  (onde incidente parallèle à l'onde de choc et venant à sa rencontre).

Nous avons dans les deux cas  $\varphi_1 = \pi$ , d'où:

$$\varphi_0 = 0: \quad R_0 = \frac{1}{\Gamma \Gamma} \frac{H - 1}{G + 1},$$

$$\varphi_0 = \pi: \quad R_\pi = \frac{1}{\Gamma \Gamma} \frac{H + 1}{G + 1}.$$

$\xi$	$R$ pour	
	$\varphi_0 = 0$	$\varphi_0 = \pi$
1	0	1
0,9	0,000 2	1,094
0,8	0,001 0	1,22
0,7	0,003 5	1,36
0,6	0,009 2	1,55
0,5	0,022	1,82
0,4	0,049	2,19
0,3	0,120	2,79
0,2	0,332	3,92
0,1	1,29	7,00
0,05	3,85	12,5
0,025	7,85	17,9
0	$\infty$	$\infty$

3.3. L'onde d'accompagnement

L'onde incidente étant représentée comme précédemment, l'onde d'accompagnement dérive du potentiel

$$\Phi_1 = B_1 e^{i(\omega_1 - \delta_1) t + [(1\eta + \zeta) x_1 + i\eta' y]/c_1}$$

Lorsque les conditions cinématiques sont satisfaites, la condition aux limites (3.0.8) donne:

$$i\omega_0 B_0 \frac{H - \cos \varphi_0}{c_0} = (i\omega_1 - \delta_1) B_1 \left( G - \frac{i\eta + \zeta}{i\omega_1 - \delta_1} \right). \tag{3.3.1}$$

Le rapport  $R$  qui nous intéresse le plus est celui de la pression acoustique immédiatement derrière l'onde de choc  $p_1 = -\varrho_1 (i\omega_1 - \delta_1) B_1$ , à la pression acoustique dans l'onde incidente  $p_0 = -i\varrho_0 \omega_0 B_0$ .

Tenant compte des relations (2.3.12 à 2.3.17) on obtient:

$$R = \frac{\cos \varphi_0 - H}{\Gamma R} \frac{i - \delta_1 / \omega_1}{i(A_1 - G) - (\delta_1 / \omega_1)(1/A_1 - G)} \tag{3.3.2}$$

et, du fait que  $\delta_1 / \omega_1 = A_1 \sqrt{(1 - A_1^2)(c_1/w)^2 - 1}$ :

$$|R| = \frac{H - \cos \varphi_0}{\Gamma R} \sqrt{\frac{A_1^2 - W_1^2}{(1 - A_1 G)^2 + (G^2 - 1) W_1^2}}$$

où l'on a posé:

$$W_1 = \frac{w}{c_1} = \Gamma \frac{1 - A_0 \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0}.$$

A titre d'indication nous avons effectué le calcul de  $|R|$  dans le cas extrême où  $w = 0$ , c'est-à-dire  $\cos \varphi_0 = 1/A_0$ . On a alors:

$$|R|_{w=0} = \frac{1}{\Gamma R} \frac{H - 1/A_0}{1/A_1 - G}$$

Pour  $\varphi_0 = \arccos 1/A_0$  on obtient

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \xi = & 1 & 0,9 & 0,8 & 0,7 & 0,6 & 0,5 & 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,05 & 0,025 & 0 \\ |R| = & 1 & 1,05 & 1,15 & 1,31 & 1,46 & 1,71 & 2,06 & 2,66 & 3,86 & 7,45 & 14,6 & 22,8 & \infty \end{array}$$

On voit que, comme dans le cas précédent, les pressions acoustiques peuvent être majorées dans une proportion importante.

#### 4. RESUME DES RESULTATS OBTENUS

La présence d'ondes acoustiques dans l'une ou l'autre des régions que sépare le front d'onde de choc se traduit par les phénomènes suivants:

a) Dans la région en dépression  $E_0$ , dans laquelle l'onde de choc progresse à une vitesse supersonique, aucune sorte d'onde réfléchie ou réfractée ne se produit.

b) Dans la région en surpression  $E_1$ , la rencontre d'une onde acoustique incidente (provenant de la région  $E_0$  ou de la région  $E_1$ ) et de l'onde de choc provoque la formation de deux ondes de type différent. L'une est une onde acoustique (réfractée ou réfléchie selon l'origine de l'onde incidente), l'autre est une onde thermique.

c) L'onde thermique, en première approximation (c'est-à-dire lorsque les ondes acoustiques incidentes sont d'une amplitude usuelle), n'est pas progressive. Elle est donc immobile par rapport au gaz contenu dans la région en surpression et entraînée par ce gaz dans son mouvement d'écoulement d'ensemble. Elle s'éloigne alors du front de l'onde de choc. Cette onde comporte des variations périodiques spatiales de température et de densité, mais aucune variation de pression. Elle s'amortit lentement et apériodiquement.

d) Lorsque l'onde acoustique incidente est située dans la région en surpression, il y a production dans cette même région d'une onde acoustique réfléchie du même type que l'onde incidente, c'est-à-dire dans le cas étudié ici, plane, progressive et uniforme.

La construction d'HUYGHENS permet d'en obtenir les caractéristiques cinématiques: direction de propagation, longueur d'onde.

L'amplitude des variations de pression dans l'onde réfléchie est toujours inférieure à l'amplitude de ces variations dans l'onde incidente.

e) Lorsque l'onde acoustique incidente est située dans la région en dépression il y a production, dans la région en surpression, d'une onde acoustique réfractée dont les propriétés dépendent de la vitesse de phase  $w$  du phénomène engendré sur le front du choc par l'onde incidente. Les propriétés principales de l'onde réfractée sont les suivantes:

x) Il existe toujours dans la région en dépression  $E_0$  deux incidences d'ondes planes qui pro-

duisent sur le front de choc la même vitesse de phase  $w$ , et par suite, dans la région en surpression  $E_1$  la même onde réfractée (au rapport d'amplitude près).

L'observation de l'onde réfractée dans la région en surpression  $E_1$  ne permet donc pas de discerner si cette onde a été engendrée par l'une ou l'autre, ou toute combinaison, des deux ondes incidentes possibles.

β) Si la vitesse de phase  $w$  de la perturbation engendrée sur l'onde de choc par l'onde acoustique incidente est supérieure à une certaine valeur limite  $w_0$  (qui dépend de l'intensité du choc), l'onde réfractée est du même type que l'onde incidente: plane, progressive et uniforme. La construction d'HUYGHENS permet d'en obtenir les caractéristiques cinématiques.

L'amplitude des variations de pression dans l'onde réfractée peut être selon les cas (angle d'incidence, amplitude du choc) inférieure, égale ou supérieure à l'amplitude de ces variations dans l'onde incidente. Toutes choses égales d'ailleurs, cette amplitude croît avec l'amplitude du choc.

La majoration d'amplitude peut devenir très importante dans le cas de chocs intenses.

γ) Si la vitesse de phase  $w$  est inférieure à la vitesse limite  $w_0$ , ce qui correspond à des incidences situées dans un secteur dont les limites sont fonction de l'amplitude du choc, l'onde réfractée prend la forme d'une «onde d'accompagnement».

Cette onde reste attachée à l'onde de choc qu'elle accompagne tout en glissant parallèlement à cette onde à la vitesse  $w$ .

Les plans d'onde (plans d'égale phase mais non d'égale intensité) sont obliques par rapport au choc. Leur direction peut être obtenue par une construction géométrique simple.

L'amplitude de l'onde décroît exponentiellement lorsqu'on s'éloigne du front de l'onde de choc. Immédiatement derrière l'onde de choc, l'amplitude des variations de pression dans l'onde d'accompagnement est d'autant plus grande que le choc est plus intense. Elle peut être supérieure à l'amplitude des variations de pression dans l'onde incidente.

δ) En résumé l'existence d'ondes acoustiques dans la région en dépression, dans laquelle progresse l'onde de choc, peut se traduire derrière l'onde de choc d'une part par un champ d'ondes acoustiques progressives qui se répandent peu à peu dans la région en sur-



pression toute entière, d'autre part par l'apparition d'ondes d'accompagnement, c'est-à-dire de perturbations oscillantes que l'onde de choc entraîne derrière elle dans sa progression.

Les unes et les autres peuvent dans certains cas comporter des oscillations de pression très supérieures à celles qui existaient avant l'arrivée de l'onde de choc.

(Reçu le 11 Décembre 1954.)

Bibliographie

- [1] BURGERS, J. M., On the transmission of sound waves through a shock wave. Proc. k. Ned. Akad. Wet. **49** [1946], 273...281.
- [2] BLOKHINTZEV, D., The propagation of sound in an inhomogeneous and moving medium, II. J. acoust. Soc. Amer. **18** [1946], 332...334.
- [3] SAUER, R., Schallausbreitung in stationären Strömungsfeldern. Compte rendu du Congrès sur l'écoulement non stationnaire des gaz compressibles, tome II, pp. 3...10. Rapport n° 21/47 du Laboratoire de Recherches Techniques de Saint-Louis (Haut-Rhin).

ANZIEHENDE UND ABSTOSSENDE KRÄFTE ZWISCHEN KUGELN  
IM SCHALLFELD

von W. DÖRR

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

Zusammenfassung

Es wurden die Kräfte, die in einer stehenden Schallwelle zwischen zwei Kugeln auftreten, gemessen. Und zwar für Abstände, die mit den Durchmessern der Kugeln vergleichbar sind, bei denen also die KÖNIGSche Formel (1) nicht mehr gültig ist. Aus den Messungen ergab sich ein Zusatzglied  $\Delta K$  zur KÖNIGSchen Formel (3), das in seinem Aufbau mit dem theoretisch geforderten (2) übereinstimmt, soweit es sich um die Abhängigkeit vom Abstand, von der Kugelgröße und der Schnelle handelt. Nicht übereinstimmend ist die Form der Winkelabhängigkeit: experimentell ergibt sich eine Zunahme von  $\Delta K$  mit  $\theta$  (Winkel zwischen Kugelverbindungsline und Stromrichtung), während theoretisch  $\Delta K$  mit wachsendem  $\theta$  abnehmen müßte.

Summary

The forces that arise between two spheres in a stationary sound wave are measured, especially for distances between the spheres comparable with their diameters, for which KÖNIG's formula (1) is not valid. From the measurements, a correction  $\Delta K$  is found for KÖNIG's formula (3) which agrees in form with a theoretically derived formula (2), in respect of dependence on distance, sphere size and velocity amplitude. The variation with the angle  $\theta$  between the line joining the spheres and the axis of motion is not in agreement; the experiments would make  $\Delta K$  increase, the theory decrease with  $\theta$ .

Sommaire

On a mesuré les forces prenant naissance entre deux sphères, dans une onde sonore stationnaire, dans le cas où les distances sont comparables aux diamètres des sphères, et où, par conséquent, la formule de KÖNIG (1) n'est plus valable. Il résulte des mesures qu'il faut ajouter à la formule de KÖNIG un terme additionnel  $\Delta K$  (3), dont la constitution est conforme à celle qu'exige la théorie (2), du moins en ce qui concerne l'influence de la distance, de la grosseur des sphères et de la vitesse. L'accord n'est pas satisfaisant, par contre, en ce qui concerne l'influence de l'angle: d'après l'expérience,  $\Delta K$  augmente avec  $\theta$  (angle que fait la droite joignant les sphères et la direction du courant), tandis que, d'après la théorie,  $\Delta K$  devrait diminuer quand  $\theta$  augmente.

Einleitung

Befinden sich feste Körper in einem bewegten Medium, so treten zwischen ihnen hydrodynamische Kräfte auf. Diese Kräfte spielen wahrscheinlich eine Rolle bei der Entstehung der Kundtschen Staubfiguren (Rippelbildung) sowie bei der Koagulation von Aerosolen durch starke Beschallung. Ihre Größe theoretisch anzugeben, wird im allgemeinen Fall schwierig sein. Nur bei einfachen Körpern (Kugel) bleibt die Rechnung übersichtlich, führt allerdings auch nur zu mehr

oder weniger guten Näherungen. Denn einerseits ist in der hydrodynamischen Rechnung das Geschwindigkeitspotential der Strömung um zwei Kugeln nur näherungsweise gegeben, etwa in Form einer Entwicklung, deren höhere Glieder vernachlässigt werden; während andererseits der Einfluß der Reibung völlig außer acht gelassen wird. Das ist in Luft durchaus gerechtfertigt, solange der Oberflächenabstand der Kugeln größer ist als die Dicke der Zähigkeitsgrenzschichten an den Oberflächen. Wird der Abstand jedoch kleiner,

so wird man das nicht mehr tun dürfen, sondern man muß die durch Zähigkeit bedingten Effekte mit in Rechnung stellen.

Eine Formel für die Kräfte, die in einem Schallfeld zwischen zwei Kugeln wirken, hat KÖNIG [1] angegeben. Man kann sie in folgender Form schreiben:

$$K_r = \frac{3}{2} \pi \varrho_L \frac{r_1^3 r_2^3}{\delta^4} v_0^2 \left( \frac{3}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

$$K_\theta = 3 \pi \varrho_L \frac{r_1^3 r_2^3}{\delta^3} v_0^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Darin bedeuten:  $K_r$  = Kraft in Richtung der Kugelverbindungsline,  $K_\theta$  = Drehmoment des Kugelpaares,  $r_1, r_2$  = Kugelradien,  $\delta$  = Zentralabstand der Kugeln,  $\theta$  = Winkel zwischen Kugelverbindungsline und Stromrichtung,  $v_0$  = Spitzenwert der Schnelle  $v = v_0 \sin \omega t$ ,  $\varrho_L$  = Dichte der Luft.

Der Rechnung liegt die Annahme eines inkompressiblen und reibungslosen Mediums zugrunde; außerdem ist die Störung, die der einfallende Strom am Ort der ersten Kugel durch den von der zweiten Kugel ausgehenden Reaktionsstrom erfährt, vernachlässigt. Die Formel gilt daher nur in dem Bereich, in dem obige Vernachlässigung zulässig ist, also dann, wenn der Abstand  $\delta \gg r_1 + r_2$  ist.

Bei kleineren Abständen muß man diese Störungen höherer Ordnung mit berücksichtigen. BJERKNES [2] hat einen solchen Fall berechnet. Danach ergibt sich ein Zusatzglied  $\Delta K$  zum KÖNIGSchen Wert  $K_r$ . Es ist dann die Gesamtkraft:

$$K_g = K_r + \Delta K \quad (2)$$

mit

$$\Delta K = -\frac{3}{2} \pi \varrho_L r_1^3 r_2^3 \frac{r_1^3 + r_2^3}{2} \cdot \frac{1}{\delta^7} (1 + 3 \cos^2 \theta) v_0^2.$$

Diese Formel gilt auch für Abstände  $\delta < r_1 + r_2$ ; allerdings mit der Einschränkung, daß man eine richtige Beschreibung nicht mehr erwarten kann, wenn Effekte, die durch die Zähigkeit des Mediums bedingt sind, auftreten.

### Messungen

Von den Schallfeldgrößen geht nur die Schnelle  $v$  in die Formeln (1) und (2) ein. Die Messungen erfolgten daher in einem Kundtschen Rohr im Schnellebauch. Und zwar wurde zur Erreichung hoher Schallstärken eine von OBERST [3] angegebene Anordnung benutzt. Sie besteht aus einem Rohr mit sprunghafter Querschnittsverengung, das am Anfang des weiteren Teiles erregt wird. An der Sprungstelle tritt dann eine Drucküberhöhung ein, die wiederum als An-

fangsdruck auf den engeren Teil wirkt und so in ihm höhere Schallstärken hervorzurufen vermag. Die Erregung erfolgte durch einen 10 Watt-Lautsprecher, betrieben über einen Kraftverstärker von einem Philips-Schwebungssummeer.

Gemessen wurde bei  $f = 525$  Hz die rein anziehende oder abstoßende Kraft  $K_r$  zwischen Kugeln verschiedener Größe ( $r = 0,44; 0,37; 0,28$  cm). Die Kugeln waren aus dünnwandigem Glas geblasen und hingen je an zwei gespreizten Fäden in den Schnellebauch des kleinen Rohres hinein. So wurde die Wirkung des Drehmomentes  $K_\theta$  ausgeschaltet. Die Kraft ergab sich aus der mikroskopisch gemessenen Auslenkung der Kugeln gegen ihre Ruhelage. Die so erreichte statische Empfindlichkeit ging bis zu 1,25 dyn/cm. Bei mikroskopischer Ablesung sind also Kräfte bis herab zu  $1,5 \cdot 10^{-3}$  dyn noch meßbar.

Die Schnelle im Schwingungsbauch bestimmte sich aus dem Schalldruck am Ende des Rohres, was durch Amplitudenmessungen von Schwebeteilchen direkt am Ort der Kugeln kontrolliert wurde.

Effekte, welche die zu messenden Anziehungskräfte störend überlagern könnten, waren nach Möglichkeit auszuschalten. Als solche kommen in Frage:

1. Wandeinflüsse, 2. Schallstrahlungsdruck, 3. Turbulenz, 4. Stokessche Reibung.

1. Die Wandeinflüsse, soweit sie hydrodynamischer Art sind oder von der akustischen Grenzschicht herrühren, lassen sich unwirksam machen, wenn der Rohrquerschnitt groß genug gegen die Abmessungen der Kugeln ist. Das war bei einem Querschnitt von  $5 \times 5$  cm<sup>2</sup> der Fall. Die Zirkulationsströmung im Rohr schließlich kann klein genug gehalten werden, wenn man mit der Schnelle nicht zu hoch geht. Bei Schnellewerten von 40 cm/s trat sie noch nicht störend in Erscheinung.

2. Der Schallstrahlungsdruck trat nicht auf, da im Schwingungsbauch gemessen wurde.

3. Turbulenz. Die Formeln über die hydrodynamischen Kräfte zwischen Kugeln gelten natürlich nur so lange, wie die Strömung um die Kugeln laminar ist. Nach MÖLLER [4] ist das — auch noch im Gebiet hinter der Kugel — der Fall, solange die Reynoldszahl  $Re < 300$  ist.

Es gilt also für eine Kugel vom Durchmesser  $d = 1$  cm in Luft:

$$Re = \frac{d v \varrho_L}{\eta} \sim 7 v \cdot 300,$$

d. h. es muß  $v < 43$  cm/s sein. Damit ist eine obere Grenze für die Schnelle gesetzt.



4. Durch die Stokessche Reibung greift eine Kraft an den Kugeln an, die sie veranlaßt, an der Bewegung des umgebenden Mediums zu einem gewissen Grade teilzunehmen, wodurch sich die Relativschnelle Kugel—Luft verändert (Mitnahme). Den Grad der Mitnahme in vorliegendem Falle theoretisch exakt anzugeben, wäre einigermaßen kompliziert und zwänge zu umfangreichen Betrachtungen. Denn die Messungen spielen sich bei Reynoldszahlen von 100...300 ab, während die einfache Stokessche Formel bis  $Re = 0,4$  gültig ist und auch die Oseensche Erweiterung nur bis zu  $Re = 2$  reicht.

Nun sind aber die Kugeln bei der Messung nicht frei beweglich, sondern mit der Eigenfrequenz  $f = 1$  Hz pendelnd aufgehängt. Die Schallfrequenz beträgt etwa 500 Hz. Sollen die Kugeln mitschwingen, so müßten sie erzwungene Schwingungen von 500 Hz ausführen. Um dabei aber zu wirksamen Amplituden zu gelangen, müßte die anregende Kraft von einer Größenordnung sein, die im ganzen System nicht auftreten kann, wie eine einfache Abschätzung zeigt. Im übrigen kann man recht gut mikroskopisch kontrollieren, ob eine Mitführung der Kugeln stattfindet. Bei 40-facher Vergrößerung und Luftamplituden von 0,28 mm wurde keine meßbare Mitführung festgestellt.

Es folgen nun einige Meßergebnisse:  
Hält man  $\delta$  konstant, so ergibt sich nach Gl. (1) und (2):

$$K_r = \text{const} \cdot v_0^2$$

Ändert sich  $\delta$  während der Messung nur wenig, so gilt noch:

$$K_r \delta^4 = \text{const} \cdot v_0^2.$$

Abb. 1 zeigt eine Messung dieser Art. Bei  $\theta = 0$  wurde die Schnelle von  $v_0 = 0$  bis  $v_0 = 35$  cm/s gesteigert und die zu den jeweiligen Schnelle-

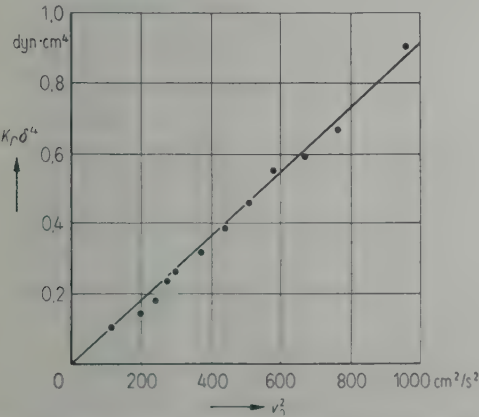


Abb. 1. Abhängigkeit der Anziehungskraft von der Schnelle  $\theta = 0$ , Kugeln:  $r = 0,74$  cm.

werten gehörigen Abstände der Kugeln wurden gemessen. Der dabei überstrichene Abstandsbereich war sehr gering (2 % des Gesamtabstandes), so daß nach den Formeln (1) und (2) die Beziehung  $K_r \delta^4 = \text{const} \cdot v_0^2$  zu erwarten war.

Wie man sieht, wird dies experimentell recht gut bestätigt.  $K_r$  hängt also quadratisch von der Schnelle ab.

Weiterhin wurde die Abhängigkeit der Kraft vom Abstand untersucht. Bei konstanter Schnelle und festgehaltenem Winkel  $\theta$  wurde  $\delta$  verändert und die zu jedem Abstand gehörige Kraft gemessen. Abb. 2 zeigt diesen Zusammenhang.  $K_g$  ist die gemessene Kraft,  $K_b$  die nach Formel (1) berechnete.

Es ergibt sich, daß mit kleineren Abständen die Differenz  $K_g - K_b$  immer größer wird, wie es ja auch nach den Voraussetzungen der Formel (1) zu erwarten ist.

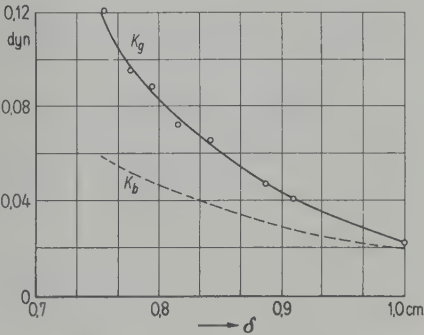


Abb. 2. Abhängigkeit der Anziehungskraft vom Abstand  $\delta$ ;  $\theta = \pi/2$ , Kugeln:  $r_1 = 0,375$  cm,  $r_2 = 0,345$  cm,  $v_0 = 38$  cm/s.

Schließlich wurde auch noch die Winkelabhängigkeit der Kraft gemessen. Bei konstanter Schnelle und kleinen Abständen wurde die Verbindungsachse der Kugeln um  $\pi/2$  gedreht und von  $10^\circ$  zu  $10^\circ$  die Auslenkung der Kugeln gegenüber ihrer Ruhelage bestimmt.

Abb. 3 zeigt als Ergebnis einer solchen Messung das Verhältnis  $R = \frac{K_r(\theta) \delta_\theta^4}{K_r(0) \delta_0^4}$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\theta$  aufgetragen. Die gestrichelte Kurve gibt den Wert von  $R$ , wie er aus der KÖNIGSchen Formel (1) folgen würde.

Wie zu erwarten, tritt auch hier eine Abweichung auf, denn die Abstände sind so klein, daß der Gültigkeitsbereich der Gleichung (1) überschritten wird.

Man kann nun aus Messungen der Art von Abb. 2 und 3 ein Zusatzglied  $\Delta K$  so bestimmen, daß  $K_g = K_r + \Delta K$  die gemessenen Kräfte beschreibt.

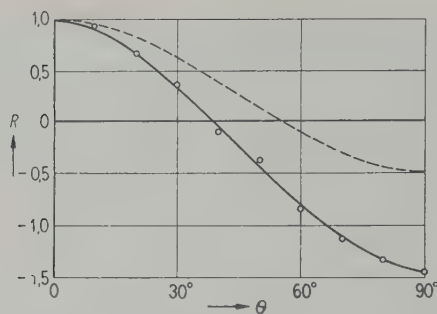


Abb. 3. Abhängigkeit der Anziehungskraft vom Winkel  $\theta$ ,  
Kugeln:  $r = 0,74$  cm.

Anhand von Messungen, die mit drei verschiedenen Kugelgrößen ausgeführt wurden, ergab sich, daß dieses Zusatzglied für alle Winkel  $\theta$  negativ (anziehend) ist und sich darstellen läßt durch:

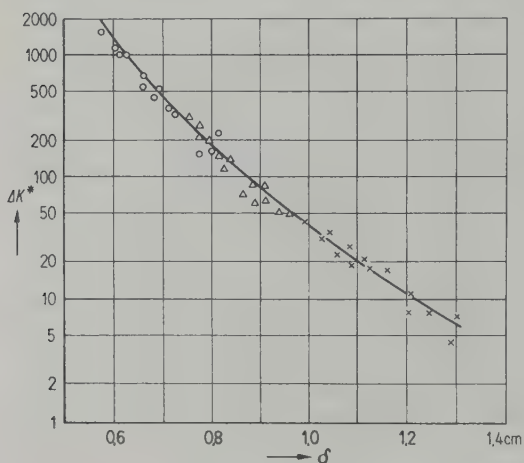


Abb. 4.  $\times \times$   $r_1 = 0,485$  cm,  $r_2 = 0,495$  cm,  $\theta = 0$  u.  $\pi/2$   
 $\triangle \triangle$   $r_1 = 0,375$  cm,  $r_2 = 0,345$  cm,  $\theta = 0$  u.  $\pi/2$   
 $\circ \circ$   $r_1 = 0,275$  cm,  $r_2 = 0,295$  cm,  $\theta = 0$  u.  $\pi/2$   
 $v_0 = 38$  cm/s.

$$\Delta K = -\frac{3}{2} \pi \varrho_L r_1^3 r_2^3 \frac{r_1^3 + r_2^3}{2} \cdot \frac{1}{\delta^7} (4 \sin^2 \theta + 6) v_0^2. \quad (3)$$

Das zeigt Abb. 4. Hier ist

$$\Delta K^* = \frac{10 \Delta K}{r_1^3 r_2^3 (r_1^3 + r_2^3) (4 \sin^2 \theta + 6)} = \frac{\text{const}}{\delta^7} v_0^2$$

für verschiedene Kugelgrößen und verschiedene Winkel in Abhängigkeit von  $\delta$  aufgetragen. Die Punkte sind Meßpunkte, die ausgezogene Kurve ist nach Gl. (3) berechnet.

Vergleicht man das experimentell gewonnene Zusatzglied (3) mit dem theoretisch berechneten (2), so zeigt sich, daß beide Ausdrücke übereinstimmen, soweit es die Abhängigkeit vom Abstand  $\delta$  und den Kugelradien  $r$  betrifft. Dagegen unterscheiden sie sich in der Form der Winkelabhängigkeit:

$$\text{theoretisch: } \Delta K = \text{const} \frac{v_0^2}{\delta^7} (1 + 3 \cos^2 \theta),$$

$$\text{experimentell: } \Delta K = \text{const} \frac{v_0^2}{\delta^7} (4 \sin^2 \theta + 6).$$

Theoretisch müßte also  $\Delta K$  mit zunehmendem Winkel  $\theta$  kleiner werden, experimentell jedoch ist unzweifelhaft ein Anwachsen von  $\Delta K$  mit  $\theta$  festzustellen.

Herrn Prof. E. MEYER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für wertvolle Hinweise während ihrer Durchführung.

(Eingegangen am 16. Dezember 1954.)

#### Schrifttum

- [1] KÖNIG, W., Ann. Phys. Chem. **42** [1891], 354; **43** [1891], 43.
- [2] BJERKNES, V., Hydrodynamische Fernkräfte, Bd. I, Leipzig 1902, S. 299.
- [3] OBERST, H., Akust. Z. **5** [1940], 27.
- [4] MÖLLER, W., Phys. Z. **39** [1938], 57.
- [5] THOMAS, W., Ann. Phys. Lpz. **42** [1913], 1079.



# ACOUSTIC RADIATION PRESSURE ON A COMPRESSIBLE SPHERE

by K. YOSIOKA and Y. KAWASIMA

Institute of Scientific and Industrial Research, Osaka University

## Summary

Calculations are given of the acoustic radiation pressure on compressible spheres suspended freely in a plane progressive or plane stationary sound wave field in a non-viscous fluid. With plane progressive waves the radiation pressure on bubbles shows a prominent peak corresponding to resonance in the pulsation mode. With plane stationary waves, on the contrary, the radiation pressure on the resonant bubble vanishes and the directions of the pressure are such that the bubbles smaller than the resonant are forced towards the nodes and the larger ones towards the loops. On small spheres, of which the densities are of the same order as that of the surrounding medium, such phenomena in the radiation pressure disappear and the formulae contain the density-compressibility factors instead of KING's density factors.

## Sommaire

On calcule la pression de radiation acoustique qui s'exerce sur des sphères compressibles suspendues librement dans un champ d'ondes sonores planes, progressives ou stationnaires, produit dans un fluide non visqueux. Dans le cas des ondes planes progressives, la pression de radiation sur les bulles présente un maximum accusé, qui correspond à une résonance dans le mode pulsatoire. Dans le cas d'ondes planes stationnaires, au contraire, la pression de radiation s'annule sur les bulles en résonance, et les directions de cette pression sont telles que les bulles plus petites que les bulles en résonance sont déplacées vers les nœuds, tandis que les bulles plus grandes sont déplacées vers les ventres. Pour des petites sphères dont la densité est du même ordre de grandeur que la densité du milieu ambiant, il n'y a plus de phénomènes de ce genre, et les formules renferment les facteurs densité-compressibilité au lieu des facteurs densité de KING.

## Zusammenfassung

Der Schallstrahlungsdruck auf kompressible Kugeln in einer nichtviskosen Flüssigkeit wird für fortschreitende und stehende ebene Wellen berechnet. Bei fortschreitenden Wellen ergibt sich bei der radialsymmetrischen Eigenresonanz ein Spitzenwert für den Strahlungsdruck, während er in stehenden Wellen bei der Resonanz ganz verschwindet und kleinere Blasen sich in den Schwingungsknoten, größere sich in den Bäuchen sammeln. Im Falle sehr kleiner Blasen, bei denen die Dichte größenordnungsmäßig gleich der Dichte des umgebenden Mediums wird, treten diese Erscheinungen nicht mehr auf, und die Formeln enthalten eine Dichte-Kompressibilitäts-Beziehung anstatt des Dichtefaktors nach KING.

## 1. Introduction

The acoustic radiation pressure on rigid spheres freely suspended in a non-viscous fluid was calculated by L. V. KING [1]. The result of the calculation stands in good agreement with the later observations [2] made in liquid on balls of such a hard material as steel.

Disagreement may, however, be expected for spheres of softer materials, of which the compressibility effect is no longer negligible. The experiments by K. SÖLLNER and C. BONDY [3] on emulsions showed that globules less dense than the medium of dispersion were forced to accumulate at the nodes and denser ones at the loops in a plane stationary wave field, the critical density ratio predicted by KING's theory being 0.40. The magnitude of the disagreement is serious for bubbles, on which the radiation pressure was recently observed by the present authors [4] to

be  $10^5 \dots 10^8$  times as large as that given by KING's theory.

In the following, calculations are given of the acoustic radiation pressure on spheres of finite compressibility placed freely in a plane progressive or plane stationary sound wave field in a non-viscous fluid.

## 2. The radiation pressure on a moving boundary

The pressure variation in a perfect fluid, where the train of sound waves is propagating, is given to terms of the order  $u_1^2/c^2$  by

$$\delta p = \varrho_0 (\dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_2) - \frac{1}{2} \varrho_0 u_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\varrho_0}{c^2} \dot{\Phi}_1^2, \quad (1)$$

where  $\varrho_0$  is the equilibrium density of the medium,  $c$  the sound velocity,  $u_1$  the first order particle velocity ( $= -\nabla \Phi_1$ ),  $\Phi_1$  the first order

velocity potential given by the approximate wave equation  $\Delta \Phi_1 = (1/c^2) \partial^2 \Phi_1 / \partial t^2$  and  $\Phi_2$  the second order velocity potential.

Let a closed boundary  $S$  in the medium be in motion with small velocity of the same order as  $u_1$  and  $S(t)$  be its position at the time  $t$ . The acoustic radiation pressure on the moving boundary  $\langle P \rangle$  is given (to terms of the second order) by

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \left\langle - \int_{S(t)} \delta p \mathbf{n} df \right\rangle \quad (2) \\ &= \left\langle - \int_{S_0} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\Phi}_1 \mathbf{n} df \right\rangle + \left\langle - \int_{S_0} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\Phi}_2 \mathbf{n} df \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{1}{2} \rho_0 u_1^2 \mathbf{n} df \right\rangle + \left\langle - \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \dot{\Phi}_1^2 \mathbf{n} df \right\rangle, \quad (3) \end{aligned}$$

$S_0$  indicating the boundary at its equilibrium position.

If a stationary state is established throughout the first and second order acoustic fields, the second order particle velocity  $u_2$  and  $\rho_0 \dot{\Phi}_2$  will take the following form:

$$\begin{aligned} u_2 &= -\nabla \Phi_2 \quad (4) \\ &= \text{const} + \vec{f}_0 + \sum_{n=1} \{ \vec{f}_{1,n} \cos n\omega t + \vec{f}_{2,n} \sin n\omega t \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{\Phi}_2 &= \delta p_2 + \frac{1}{2} \rho_0 u_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \dot{\Phi}_1^2 \quad (5) \\ &= \text{const} + g_0 + \sum_{n=1} \{ g_{1,n} \cos n\omega t + g_{2,n} \sin n\omega t \}, \end{aligned}$$

where  $\delta p_2$  is the second order pressure variation,  $\vec{f}_0, \vec{f}_{1,n}, \vec{f}_{2,n}, g_0, g_{1,n}, g_{2,n}$  functions of the coordinates only.

From (4) and (5), we have

$$g_0(x, y, z) = \text{const}, \quad (6)$$

from which follows

$$\left\langle \int_{S_0} \int_{S_0} \rho_0 \dot{\Phi}_2 \mathbf{n} df \right\rangle = 0. \quad (7)$$

Expressing the normal velocity of the boundary by  $u_n \mathbf{n}$ , we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_{S(t)} \rho_0 \Phi_1 \mathbf{n} df \right\} &= \int_{S(t)} \rho_0 \dot{\Phi}_1 \mathbf{n} df + \quad (8) \\ &\quad + \int_{S(t)} \rho_0 \nabla \Phi_1 \cdot u_n \mathbf{n} df. \end{aligned}$$

If both  $\Phi_1$  and the displacement of the boundary are periodic with regard to time, it follows, by taking the time average of (8) and writing  $S_0$  in place of  $S(t)$  in the last integral, that

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{S(t)} \rho_0 \dot{\Phi}_1 \mathbf{n} df \right\rangle &= - \left\langle \int_{S_0} \int_{S_0} \rho_0 \nabla \Phi_1 \cdot u_n \mathbf{n} df \right\rangle \quad (9) \\ &= \left\langle \int_{S_0} \int_{S_0} \rho_0 (u_n \mathbf{n} + u_t \mathbf{t}) u_n \mathbf{n} df \right\rangle, \end{aligned}$$

$u_t \mathbf{t}$  being the tangential particle velocity in the medium.

Putting (9) and (7) into (3), we have finally

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= - \left\langle \int_{S_0} \int_{S_0} \rho_0 (u_n \mathbf{n} + u_t \mathbf{t}) u_n \mathbf{n} df \right\rangle + \quad (10) \\ &\quad + \left\langle \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{1}{2} \rho_0 u_1^2 \mathbf{n} df \right\rangle - \left\langle \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{c^2} \dot{\Phi}_1^2 \mathbf{n} df \right\rangle. \end{aligned}$$

The radiation pressure on any moving boundary is thus calculated in terms of the first order velocity potential, all the integrals being taken over the surface at its equilibrium position.

When the boundary is spherical (radius  $a$ ) and the acoustic field axially symmetrical with regard to the direction  $\theta = 0$ , the radiation pressure along  $\theta = 0$  is given by

$$\langle P \rangle = \langle P_{uv} \rangle + \langle P_{u\theta} \rangle + \langle P_{uv, u\theta} \rangle + \langle P_\phi \rangle, \quad (11)$$

where

$$\langle P_{uv} \rangle = \left\langle -\pi a^2 \rho_0 \int_0^\pi \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=a}^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \right\rangle, \quad (12)$$

$$\langle P_{u\theta} \rangle = \left\langle \pi \rho_0 \int_0^\pi \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)_{r=a}^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \right\rangle, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \langle P_{uv, u\theta} \rangle &= \left\langle 2\pi a \lambda \rho_0 \int_0^\pi \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)_{r=a} \times \right. \\ &\quad \times \sin^2 \theta d\theta \rangle, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\langle P_\phi \rangle = \left\langle -\frac{\pi a^2 \rho_0}{c^2} \int_0^\pi (\dot{\Phi}_1)_{r=a}^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \right\rangle, \quad (15)$$

$\Phi_1$  being the solution, satisfying the boundary conditions at its equilibrium position, of the scattering by a compressible sphere.

### 3. Scattering of plane waves by a compressible sphere

#### a) Plane progressive waves

Let a sphere of radius  $a$  be placed freely at the origin of a co-ordinate system. The incident velocity potential  $\Phi_i$  of the plane progressive waves propagating in the direction of  $z$ -axis or  $\theta = 0$  is expressed by the following expansion

$$\begin{aligned} \Phi_i &= e^{i(\omega t - kz)} \\ &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n J_n(kr) P_n(\cos \theta), \quad (16) \end{aligned}$$



where  $k$  is the wave number,  $J_n$  the spherical Bessel function of the order  $n$  and  $P_n$  the Legendre function of the order  $n$ .

The velocity potential outside the sphere,  $\Phi_1$ , may be written as

$$\Phi_1 = \Phi_i + \Phi_s, \quad (17)$$

where  $\Phi_s$  is the velocity potential of the scattered waves and may be expressed as follows:

$$\Phi_s = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n A_n H_n^{(2)}(k\nu) P_n(\cos\theta), \quad (18)$$

$H_n^{(2)}$  being the spherical Hankel function of the second kind,  $A_n$  a constant to be determined by the boundary conditions.

The velocity potential inside the sphere,  $\Phi^*$ , may have the following expression:

$$\Phi^* = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n B_n J_n(k^*\nu) P_n(\cos\theta), \quad (19)$$

where  $k^*$  is the wave number inside the sphere—the mark  $*$  is used hereafter to indicate quantities concerning the sphere—,  $B_n$  a constant to be determined together with  $A_n$  by the following boundary conditions,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} \quad \text{at} \quad \nu = a \quad (20)$$

$$\text{and} \quad \varrho_0 \dot{\Phi}_1 = \varrho^* \dot{\Phi}^* \quad \text{at} \quad \nu = a, \quad (21)$$

$\varrho_0$  and  $\varrho^*$  being respectively the density of the outer and inner medium.  $A_n$  and  $B_n$  are found as follows:

$$A_n = \frac{\lambda k J_n(k^*a) J'_n(ka) - k^* J'_n(k^*a) J_n(ka)}{k^* J'_n(k^*a) H_n^{(2)}(ka) - \lambda k J_n(k^*a) H_n^{(2)'}(ka)}, \quad (22)$$

$$B_n = \frac{ik}{(ka)^2 [k^* J'_n(k^*a) H_n^{(2)}(ka) - \lambda k J_n(k^*a) H_n^{(2)'}(ka)]}, \quad (23)$$

where  $\lambda = \varrho^*/\varrho_0$ .

If  $(ka)^2 \ll 1$ ,  $(k^*a)^2 \ll 1$  and  $\lambda = O((ka)^2)$ ,  $B_0$  takes the following expression

$$B_0 = \frac{3i}{-(k^*a)^2 ka + i[3\lambda - (k^*a)^2]}. \quad (24)$$

This is the case of a bubble suspended in liquid and  $B_0$  is proportional to the amplitude of the pulsation at the surface. Eq. (24) shows the resonance in the pulsation, which occurs at

$$(k^*a)^2 = 3\lambda, \quad (25)$$

the resonance frequency  $f_r$  for an ideal gas bubble being given by

$$f_r = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\varrho_0}}, \quad (26)$$

where  $\gamma$  is the ratio of the specific heats of the gas,  $p_0$  the hydrostatic pressure. The calculations in the next section show, for plane progressive waves, a prominent peak in the radiation pressure corresponding to resonance in the pulsation of the bubble.

#### b) Plane stationary waves

If the centre of the sphere be at a distance  $h$  from a nodal plane, the incident velocity potential referred to the equilibrium position of the centre as origin may be written

$$\begin{aligned} \Phi_i &= e^{i\omega t} [e^{ik(z+h)} + e^{-ik(z+h)}] \\ &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n \delta_n J_n(k\nu) P_n(\cos\theta), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{where} \quad \delta_n = (-1)^n e^{ikh} + e^{-ikh}. \quad (28)$$

The scattered velocity potential,  $\Phi_s$ , and the velocity potential inside the sphere,  $\Phi^*$ , may be written

$$\Phi_s = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n C_n H_n^{(2)}(k\nu) P_n(\cos\theta), \quad (29)$$

$$\Phi^* = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n D_n J_n(k^*\nu) P_n(\cos\theta). \quad (30)$$

$C_n$  and  $D_n$  are determined by the boundary conditions given by (20) and (21) as follows:

$$C_n = A_n \delta_n, \quad D_n = B_n \delta_n. \quad (31), (32)$$

#### 4. The radiation pressure on a compressible sphere

It is convenient to express  $P_{uv}$ ,  $P_{u\theta}$ ,  $P_{uv, u\theta}$ ,  $P_\phi$ , in terms of  $\Phi^*$ , and by using the relations

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} \quad \text{at} \quad \nu = a, \quad (33)$$

$$\varrho_0 \dot{\Phi}_1 = \varrho^* \dot{\Phi}^* \quad \text{at} \quad \nu = a, \quad (34)$$

$$\varrho_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = \varrho^* \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta} \quad \text{at} \quad \nu = a, \quad (35)$$

together with the substitution  $\cos\theta = \mu$ , we have from (12), (13), (14) and (15) the following expressions

$$\langle P_{uv} \rangle = \langle -\pi a^2 \varrho_0 \int_{-1}^+ \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} \right)^2_{\nu=a} \mu d\mu \rangle, \quad (36)$$

$$\langle P_{u\theta} \rangle = \langle \pi \lambda^2 \varrho_0 \int_{-1}^+ \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mu} \right)^2_{\nu=a} \mu (1-\mu^2) d\mu \rangle, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \langle P_{uv, u\theta} \rangle &= \langle -2\pi a \lambda \varrho_0 \int_{-1}^+ \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} \right)_{\nu=a} \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mu} \right)_{\nu=a} \\ &\quad \times (1-\mu^2) d\mu \rangle, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\langle P_\phi \rangle = \left\langle -\frac{\pi a^2 \lambda^2}{c^2} - \varrho_0 \int_{-1}^{+1} (\dot{\Phi}^*)_{v=a}^2 \mu d\mu \right\rangle. \quad (39)$$

It is also convenient to write the solution obtained in Section 3 in the form

$$\operatorname{Re}(\Phi^*)_{v=a} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) M_n P_n(\cos \theta), \quad (40)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial v}\right)_{v=a} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) K_n P_n(\cos \theta), \quad (41)$$

or

$$M_n = \operatorname{Re}[e^{i\omega t} (-i)^n B_n J_n(k^*a)], \quad (42)$$

$$K_n = \operatorname{Re}[e^{i\omega t} (-i)^n B_n k^* J'_n(k^*a)]. \quad (43)$$

Substituting (40) or (41) into (36), (37), (38) or (39), we have the expression of the radiation pressure in terms of  $M_n$ 's and  $K_n$ 's.

$$\langle P \rangle = \langle P_{uv} \rangle + \langle P_{u\theta} \rangle + \langle P_{uv, u\theta} \rangle + \langle P_\phi \rangle, \quad (44)$$

$$\langle P_{uv} \rangle = -2\pi a^2 \varrho_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) \langle K_n K_{n+1} \rangle, \quad (45)$$

$$\langle P_{u\theta} \rangle = 2\pi \lambda^2 \varrho_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1)(n+2) \langle M_n M_{n+1} \rangle, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \langle P_{uv, u\theta} \rangle = & -2\pi a \lambda \varrho_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)(n+2) \langle K_n M_{n+1} \rangle + \\ & + 2\pi a \lambda \varrho_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1) \langle M_n K_{n+1} \rangle, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\langle P_\phi \rangle = -2\pi k^2 a^2 \lambda^2 \varrho_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) \langle M_n M_{n+1} \rangle. \quad (48)$$

If  $M_n$  and  $K_n$  are written in the form

$$M_n = M_{1,n} \cos \omega t + M_{2,n} \sin \omega t, \quad (49)$$

$$K_n = K_{1,n} \cos \omega t + K_{2,n} \sin \omega t, \quad (50)$$

we have

$$2 \langle M_n M_{n+1} \rangle = M_{1,n} M_{1,n+1} + M_{2,n} M_{2,n+1}, \quad (51)$$

$$2 \langle K_n M_{n+1} \rangle = K_{1,n} M_{1,n+1} + K_{2,n} M_{2,n+1} \quad (52)$$

and so on.

Writing  $B_n$  (in the plane progressive wave field) in the form

$$B_n = \frac{1}{ka} \cdot \frac{i}{D_{1,n} - i D_{2,n}}, \quad (53)$$

where

$$(54)$$

$$D_{1,n} = k^* a J'_n(k^* a) J_n(ka) - \lambda k a J_n(k^* a) J'_n(ka), \quad (55)$$

$$D_{2,n} = k^* a J'_n(k^* a) N_n(ka) - \lambda k a J_n(k^* a) N'_n(ka)$$

and  $N_n$  is the spherical Neumann function, and substituting (42), (43) with (53) into (44), (45), (46), (47) and (48), it will be proved that

$$\langle P \rangle = 2\pi \times$$

$$\times \varrho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \{D_{1,n} D_{2,n+1} - D_{2,n} D_{1,n+1}\}^2}{\{D_{1,n}^2 + D_{2,n}^2\} \{D_{1,n+1}^2 + D_{2,n+1}^2\}}. \quad (56)$$

Hence, the radiation pressure on a compressible sphere in a plane progressive wave field is always positive, i. e., in the direction of wave propagation.

### 5. Radiation pressure on small spheres,

$[(ka)^2, (k^*a)^2 \ll 1]$ , of which  $\lambda = c^*/c_0 = O(1)$

This is the case of a small liquid sphere suspended in another liquid. If  $(ka)^2$  and  $(k^*a)^2$  are negligibly small compared to unity  $M_n$ 's and  $K_n$ 's, for which  $n \geq 3$ , will contribute nothing to the final result.

Consequently we have from (43), (44), (45) and (46)

$$\begin{aligned} \langle P \rangle = & -2\pi \varrho_0 [2a^2(1+2\lambda) \langle K_0 K_1 \rangle + \\ & + 4a^2(\lambda-1) \langle K_1 K_2 \rangle + 2k^2 a^2 \lambda^2 \langle M_0 M_1 \rangle + \\ & + 12\lambda(1-\lambda) \langle M_1 M_2 \rangle]. \end{aligned} \quad (57)$$

#### a) Plane progressive waves

Substituting  $M_n$ 's and  $K_n$ 's into (57), we obtain the result

$$\langle P \rangle = 2\pi \varrho_0 (ka)^6 F(\lambda, \sigma) \quad (58)$$

$$= \pi a^2 \cdot 4 (ka)^4 \frac{I}{c} F(\lambda, \sigma), \quad (59)$$

where  $\sigma = c^*/c = k/k^*$ ,  $I (= \varrho_0 c k^2/2)$  is the intensity of the incident waves and

$$F(\lambda, \sigma) = \frac{1}{(1+2\lambda)^2} \left[ \left( \lambda - \frac{1+2\lambda}{3\lambda\sigma^2} \right)^2 + \frac{2}{9} (1-\lambda)^2 \right]. \quad (60)$$

$F(\lambda, \sigma)$  is the density-compressibility factor, which reduces to KING's density factor when  $\sigma \rightarrow \infty$ . It is positive and the radiation pressure is in the direction of wave propagation.

#### b) Plane stationary waves

Substituting  $M_n$ 's and  $K_n$ 's into (57), we obtain

$$\langle P \rangle = 4\pi \varrho_0 (ka)^3 \sin 2kh F(\lambda, \sigma) \quad (61)$$

$$= \pi a^2 4ka \bar{E} \sin 2kh F(\lambda, \sigma), \quad (62)$$

where  $\bar{E} (= \varrho_0 k^2)$  is the mean total energy-density in the stationary wave field and  $F(\lambda, \sigma)$  the density-compressibility factor given by

$$F(\lambda, \sigma) = \frac{\lambda + [2(\lambda-1)/3]}{1+2\lambda} - \frac{1}{3\lambda\sigma^2}, \quad (63)$$

which approaches KING's density factor when  $\sigma \rightarrow \infty$ . If  $F(\lambda, \sigma)$  is positive, the radiation



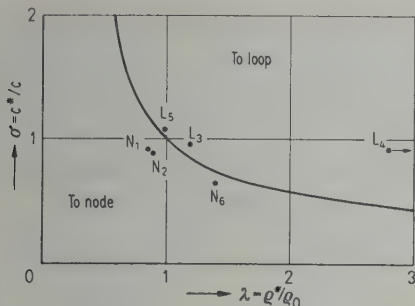


Fig. 1. The curve  $F(\lambda, \sigma) = \frac{\lambda + [2(\lambda - 1)/3]}{1 + 2\lambda} - \frac{1}{3\lambda\sigma^2} = 0$

and the results of experiments.

(1) Toluene in water, (2) Benzene in water, (3) Nitrobenzene in water, (4) Mercury in water, (5) Ortho toluidine in water, (6)  $\text{CCl}_4$  in 2.5 %  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  aq. solution.

N and L in the figure show that the accumulation was observed respectively at the nodes and at the loops.

pressure urges the sphere away towards the loops and if negative towards the nodes.

The curve  $F(\lambda, \sigma) = 0$  is shown in Fig. 1. On the right of the curve,  $F(\lambda, \sigma)$  is the positive and the spheres are to be forced away towards the loops and on the left towards the nodes.

The points indicated by 1, 2, 3 and 4 are from the experiments by K. SÖLLNER and C. BONDY on emulsions, while the points 5 and 6 from our data (unpublished). According to KING's theory, the critical density ratio is 0.40 and denser particles than  $0.40 \times \rho_0$  accumulate at the loops and vice versa. SÖLLNER and BONDY found an experimental rule that particles denser than the medium of dispersion accumulate at the loops and vice versa. The figure shows the best agreement between the experiments and the present calculations (Eq. (62) and (63)).

## 6. Radiation pressure on bubbles

$$[(ka)^2, (k^*a)^2 \ll 1, \lambda = O[(ka)^2]]$$

### a) Plane progressive waves

Putting  $M_n$ 's and  $K_n$ 's into (44), (45), (46), (47) and (48), we have

$$\langle P_{uv} \rangle \gg \langle P_{u\theta} \rangle, \langle P_{uv, u\theta} \rangle, \langle P_\phi \rangle \quad (64)$$

$$\langle P \rangle = \langle P_{uv} \rangle, \quad (65)$$

$$= -2\pi a^2 \rho_0 K_{2,0} K_{2,1}, \quad (66)$$

$$= \frac{2\pi \rho_0 \sigma^2 (k^*a)^6}{\sigma^2 (k^*a)^6 + [3\lambda - (k^*a)^2]^2}, \quad (67)$$

$$= \frac{4\pi a^2 (k^*a)^4 I}{c [ \sigma^2 (k^*a)^6 + [3\lambda - (k^*a)^2]^2 ]}, \quad (68)$$

where  $I (= \rho_0 c k^2/2)$  is the intensity of the incident waves.

The frequency dependence of the radiation pressure given by Eq. (67) is shown in Fig. 2 for air bubbles in water ( $0^\circ\text{C}$ , 1 atm). It has a prominent peak at the pulsation resonance,  $k^*a = \sqrt{3}\lambda$ , and takes a minimum value at  $k^*a \approx 3/\sqrt{\lambda}$ .

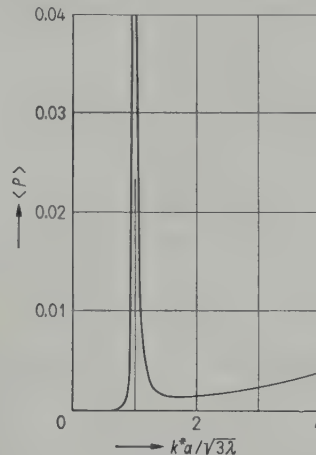


Fig. 2. The radiation pressure on air bubbles given by Eq. (67), at  $0^\circ\text{C}$ , 1 atm, the peak value being taken as unity.

The ratio  $\chi$  of the magnitude of the radiation pressure on the resonant bubble calculated from Eq. (68) to that calculated from KING's formula is found to be

$$\chi = \frac{\langle P \rangle_{\text{res.}}}{\langle P \rangle_{\text{KING}}} \approx \frac{1}{\lambda^3 \sigma^2}. \quad (69)$$

Let  $f_r$  and  $\Delta f$  be respectively the resonance frequency and the width between two frequencies, at each of which the radiation pressure falls to a half of its peak value and the pulsation amplitude to  $1/\sqrt{2}$  of its peak value. If the sharpness  $Q_{RP}$  of the  $\langle P \rangle$ -frequency curve is defined by the ratio  $f_r/\Delta f$ , we have (smallness of  $\Delta f/f_r$  being assumed)

$$Q_{RP} = \frac{f_r}{\Delta f} = Q_p = \frac{\pi}{D} \approx \frac{1}{\sigma \sqrt{3}\lambda} \quad (70)$$

where  $Q_p$  is "Q of the pulsation mode" and  $D$  the logarithmic decrement of the resonant bubble.

In virtue of Eq. (70), we can determine the logarithmic decrement of the resonant bubbles from a study of the radiation pressure.

For air bubbles in water at  $0^\circ\text{C}$ , 1 atm, we obtain from the known value of  $\lambda$  and  $\sigma$

$$\chi \approx 8 \times 10^9, \quad Q_p \approx 70. \quad (71)$$

The experiments of the authors and Eq. (68) are found qualitatively in good agreement.

Quantitatively, however, the theory gives for both  $\chi$  and  $Q_p$  values 7...10 times too great, if the effect of heat conduction is not taken into account.

Calculations, in which the heat conduction effect in bubbles is taken into account, and results of an experiment will be given in another paper.

### b) Plane stationary waves

Putting  $K$ 's into (65), we have

$$\langle P \rangle = -2\pi a^2 \rho_0 \langle K_0 K_1 \rangle, \\ = -2\pi a^2 \rho_0 K_{1,0} K_{1,1}, \quad (72)$$

$$= -4\pi \rho_0 \sin 2kh F(\lambda, \sigma, k^*a), \quad (73)$$

or

$$= -\frac{4\pi}{k^2} \bar{E} \sin 2kh F(\lambda, \sigma, k^*a), \quad (74)$$

where  $\bar{E}$  is the mean total energy density in the plane stationary wave field and  $F(\lambda, \sigma, k^*a)$  is given as

$$F(\lambda, \sigma, k^*a) = \frac{\sigma(k^*a)[3\lambda - (k^*a)^2]}{\sigma^2(k^*a)^6 + [3\lambda - (k^*a)^2]^2}. \quad (75)$$

The frequency dependence of  $F(\lambda, \sigma, k^*a)$  is shown in Fig. 3 for air bubbles in water (0°C, 1 atm). If  $k^*a > \sqrt{3}\lambda$ ,  $F(\lambda, \sigma, k^*a)$  is negative and the radiation pressure is in the direction from the nodes towards the loops and if  $k^*a < \sqrt{3}\lambda$ , towards the nodes. At a given frequency, smaller bubbles than the resonant should be forced away towards the nodes and greater ones towards the loops. On the resonant bubbles, the radiation pressure in the plane stationary field should vanish.

Observations by the authors, which will be given in another paper, and the above-stated result of the calculation are qualitatively in good agreement.

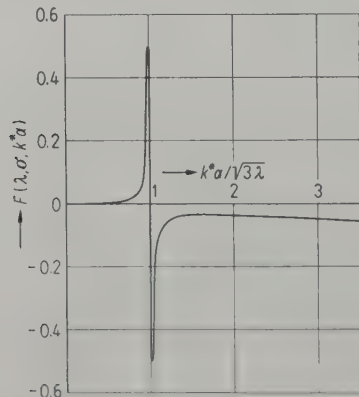


Fig. 3.  $F(\lambda, \sigma, k^*a) \cdot k^*a$  curve for air bubbles in water, at 0°C, 1 atm.

## Appendix

In the calculation of the radiation pressures on small spheres use was made of the following expressions for  $M_n$ 's and  $K_n$ 's.

a) Small spheres  $[(ka)^2, (k^*a)^2 \ll 1]$ , of which  $\lambda = O(1)$ .

Plane progressive waves:

$$aK_0 = -\frac{(k^*a)^2}{3\lambda} \cos \omega t + \frac{(k^*a)^4 k a (\lambda \sigma^2 - 1)}{9\lambda^2} \times \sin \omega t,$$

$$aK_1 = \frac{(ka)^4(1-\lambda)}{3(1+2\lambda)^2} \cos \omega t + \frac{ka}{1+2\lambda} \sin \omega t,$$

$$aK_2 = -\frac{2(ka)^2}{3(2+3\lambda)} \cos \omega t + \frac{4(ka)^7(1-\lambda)}{135(2+3\lambda)^2} \times \sin \omega t,$$

$$M_0 = \frac{1}{\lambda} \cos \omega t - \frac{(k^*a)^2 k a (\lambda \sigma^2 - 1)}{3\lambda^2} \sin \omega t,$$

$$M_1 = \frac{(ka)^4(1-\lambda)}{3(1+2\lambda)^2} \cos \omega t + \frac{ka}{1+2\lambda} \sin \omega t,$$

$$M_2 = -\frac{(ka)^2}{3(2+3\lambda)} \cos \omega t + \frac{2(ka)^7(1-\lambda)}{135(2+3\lambda)^2} \sin \omega t.$$

Plane stationary waves:

$$aK_0 = -\frac{(k^*a)^2}{3\lambda} 2 \cos kh \cos \omega t + \frac{(k^*a)^4 k a (\lambda \sigma^2 - 1)}{9\lambda^2} 2 \cos kh \sin \omega t,$$

$$aK_1 = -\frac{ka}{1+2\lambda} 2 \sin kh \cos \omega t + \frac{(ka)^4(1-\lambda)}{3(1+2\lambda)^2} 2 \sin kh \sin \omega t,$$

$$aK_2 = -\frac{2(ka)^2}{3(2+3\lambda)} 2 \cos kh \cos \omega t + \frac{4(ka)^7(1-\lambda)}{135(2+3\lambda)^2} 2 \cos kh \sin \omega t,$$

$$M_0 = \frac{1}{\lambda} 2 \cos kh \cos \omega t - \frac{(k^*a)^2 k a (\lambda \sigma^2 - 1)}{3\lambda^2} 2 \cos kh \sin \omega t,$$

$$M_1 = -\frac{ka}{1+2\lambda} 2 \sin kh \cos \omega t + \frac{(ka)^4(1-\lambda)}{3(1+2\lambda)^2} 2 \sin kh \sin \omega t,$$

$$M_2 = -\frac{(ka)^2}{3(2+3\lambda)} 2 \cos kh \cos \omega t + \frac{2(ka)^7(1-\lambda)}{135(2+3\lambda)^2} 2 \cos kh \sin \omega t.$$



b) *Small spheres*  $[(ka)^2, (k^*a)^2 \ll 1]$ , of which  $\lambda = O[(ka)^2]$ .

Plane progressive waves:

$$aK_0 = \frac{1}{(ka)^2(k^*a)^4 + [3\lambda - (k^*a)^2]^2} \{ -(k^*a)^2 \times \\ \times [3\lambda - (k^*a)^2] \cos \omega t - (k^*a)^4 (ka) \sin \omega t \},$$

$$aK_1 = \frac{(ka)^4}{3} \cos \omega t + ka \sin \omega t,$$

$$aK_2 = -\frac{(ka)^2}{3} \cos \omega t + \frac{(ka)^7}{135} \sin \omega t,$$

$$M_0 = \frac{1}{(ka)^2(k^*a)^4 + [3\lambda - (k^*a)^2]^2} \times \\ \times \{ 3[3\lambda - (k^*a)^2] \cos \omega t + 3(k^*a)^2 ka \sin \omega t \},$$

$$M_1 = \frac{(ka)^4}{3} \cos \omega t + ka \sin \omega t,$$

$$M_2 = -\frac{(ka)^2}{6} \cos \omega t + \frac{(ka)^7}{270} \sin \omega t.$$

Plane stationary waves:

$$aK_0 = \frac{(k^*a)^2 2 \cos kh}{(ka)^2(k^*a)^4 + [3\lambda - (k^*a)^2]^2} \times \\ \times \{ -[3\lambda - (k^*a)^2] \cos \omega t - (k^*a)^2 ka \sin \omega t \},$$

$$aK_1 = -ka 2 \sin kh \cos \omega t + \frac{2}{3} (ka)^4 \sin kh \sin \omega t,$$

$$aK_2 = -\frac{(ka)^2}{3} 2 \cos kh \cos \omega t + \\ + \frac{(ka)^7}{135} 2 \cos kh \sin \omega t,$$

$$M_0 = \frac{2 \cos kh}{(ka)^2(k^*a)^4 + [3\lambda - (k^*a)^2]^2} \times \\ \times \{ 3[3\lambda - (k^*a)^2] \cos \omega t + 3(k^*a)^2 ka \sin \omega t \},$$

$$M_1 = -ka 2 \sin kh \cos \omega t + \frac{(ka)^4}{3} 2 \sin kh \sin \omega t,$$

$$M_2 = -\frac{(ka)^2}{6} 2 \cos kh \cos \omega t + \\ + \frac{(ka)^7}{270} 2 \cos kh \sin \omega t.$$

(Received 12th January, 1955.)

#### References

- [1] KING, L. V., Proc. roy. Soc. A. **153** [1936], 1.
- [2] WADA, E., J. appl. Phys. Japan **15** [1949], 49.
- [3] SÖLLNER, K. and BONDY, C., Trans. Faraday Soc. **32** [1936], 616.
- [4] YOSIOKA, K., KAWASIMA, Y. and HIRANO, H., Acustica **5** [1955], 173.
- [5] KOTANI, M., Proc. phys. math. Soc. Japan **15** [1933], 32.

## ACOUSTIC RADIATION PRESSURE ON BUBBLES AND THEIR LOGARITHMIC DECREMENT

by K. YOSIOKA, Y. KAWASIMA and H. HIRANO

Institute of Scientific and Industrial Research, Osaka University

### Summary

Radiation pressure on bubbles in a plane progressive sound wave field is calculated taking the effect of heat conduction into account. At 70 and 120 kc/s in water, measurements were made on  $H_2$  and  $O_2$  bubbles. The result of the experiment is in good agreement with theory, showing a prominent peak corresponding to the pulsation resonance. Logarithmic decrements of the resonant bubbles deduced from the data on radiation pressure are also in good agreement with the theory of PFRIEM and SANEYOSHI. In the case of plane stationary waves, bubbles smaller than the resonant are found to accumulate at the nodes and larger ones at the loops, as expected from the authors' calculations, while the radiation pressure on the resonant bubble vanishes.

### Sommaire

On a calculé, en tenant compte de l'influence de la conduction thermique, la pression de radiation sur des bulles se trouvant dans un champ d'ondes sonores progressives planes. Les mesures ont porté sur des bulles de  $H_2$  et de  $O_2$  dans de l'eau, et pour les fréquences 70 et 120 kHz. Les résultats expérimentaux et théoriques sont en bon accord, et mettent en évidence un maximum accusé correspondant à la résonance pulsatoire. Les décroissements logarithmiques des bulles en résonance, décroissements déduits des résultats de mesure de la pression de radiation, sont également conformes à la théorie de PFRIEM et SANEYOSHI. On a constaté, en bon accord avec les résultats des calculs des auteurs, que, dans le cas d'ondes stationnaires planes, des bulles plus petites que les bulles en résonance s'accumulent aux nœuds, tandis que les bulles plus grandes vont aux ventres; par ailleurs, la pression de radiation est nulle sur les bulles en résonance.

### Zusammenfassung

Der auf Gasblasen in einer ebenen fortschreitenden Schallwelle wirkende Schallstrahlungsdruck wurde unter Berücksichtigung der Wärmeleitung berechnet. Messungen an  $H_2$ - und  $O_2$ -Blasen in Wasser bei 70 und 120 kHz, wobei man einen Spitzenwert des Schallstrahlungsdrucks bei der radialsymmetrischen Resonanz erhielt, ergaben gute Übereinstimmung mit der Theorie. Auch die aus den Werten des Strahlungsdrucks berechneten logarithmischen Dekremente stimmten gut mit der Theorie von PFRIEM und SANEYOSHI überein. In ebenen stehenden Wellen sammelten sich Blasen, die kleiner als die Resonanzblasen waren, an den Schwingungsknoten, die größeren in den Schwingungsbäuchen, wie es von den Autoren auf Grund ihrer Berechnungen erwartet wurde, während bei der Resonanz der Strahlungsdruck verschwand.

### 1. Introduction

Calculations of the radiation pressure acting on bubbles, which are freely suspended in a plane progressive sound wave field in a perfect fluid, are given in Section 2 taking the effect of heat conduction into account.

In Section 3, the procedures and the results of measurements are given of the radiation pressures on  $H_2$  and  $O_2$  bubbles in water.

Of the logarithmic decrements of the resonant bubbles, the only data so far are by E. MEYER and K. TAMM [1]. They found rather larger values (especially in the ultrasonic range) than those indicated by the theories of H. PFRIEM [2] and J. SANEYOSHI [3], who calculated the decrement taking the effect of heat conduction into account. The values of the logarithmic decrement obtained from the data on radiation pressure, as well as the radii of the resonant bubbles, are in good agreement with the theories of PFRIEM and SANEYOSHI.

### 2. Radiation pressure on small bubbles, taking the effect of heat conduction into account

In the present paper, the same notations are used as in the authors' preceding paper [4] entitled "Acoustic radiation pressure on a compressible sphere".

Let a bubble of radius  $a$  be placed freely in a perfect fluid, in which the train of the plane progressive sound waves is propagating. Referring to the equilibrium position of the centre as origin, the incident velocity potential  $\Phi_i$  and the scattered velocity potential  $\Phi_s$  may be expressed

$$\Phi_i = e^{i(\omega t - kx)} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n \times \quad (1)$$

$$\times J_n(kr) P_n(\cos \theta),$$

$$\Phi_s = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n A_n H_n^{(2)}(kr) P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

It is assumed that compared to the wavelength of the sound, the radius of the bubble is so small that  $(ka)^2$ ,  $(k^*a)^2 \ll 1$  and that the motion of the bubble corresponding to  $n \geq 2$  in

the order of spherical harmonics contributes nothing to the final result. Even if the effect of heat conduction is introduced, the following relations may hold as in the non-heat-conducting bubbles:

$$\langle P_{uv} \rangle \gg \langle P_{u\theta} \rangle, \langle P_{uv, u\theta} \rangle, \langle P_\phi \rangle$$

and

$$\langle P \rangle = \langle P_{uv} \rangle = -2\pi \rho_0 \cdot 2a^2 \cdot \langle K_0 K_1 \rangle, \quad (3)$$

where  $K$ 's are given by

$$-u_r = K_0 + 3K_1 \cos \theta, \quad (4)$$

$$K_0 = K_{1,0} \cos \omega t + K_{2,0} \sin \omega t, \quad (5)$$

$$K_1 = K_{1,1} \cos \omega t + K_{2,1} \sin \omega t, \quad (6)$$

$u_r$  being the radial velocity at the surface, and

$$2 \langle K_0 K_1 \rangle = K_{1,0} K_{1,1} + K_{2,0} K_{2,1}. \quad (7)$$

The expression for  $K_1$  may not be altered by the introduction of the heat conduction effect, since the vibration corresponding to  $n=1$  is independent of the pulsation of the sphere. Consequently we have

$$K_{1,1} = k(ka)^3/3, \quad K_{2,1} = k. \quad (8), (9)$$

Taking the effect of heat conduction into account, PFRIEM gave the following formula for the motion corresponding to  $n=0$

$$u_r = \frac{1}{4\pi a^2} \cdot \frac{dV}{dt} = -\frac{i\omega a}{3\gamma p^*} \left[ 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(\gamma-1)\kappa^*}{i\omega \rho^* c_p^* a^2} \times \right. \quad (10)$$

$$\left. \times 2(s^* a \cosh s^* a - \sinh s^* a) \Gamma \right] \delta p^*,$$

where  $V$  is the volume of the sphere,  $\delta p^*$  the excess pressure at the surface,

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \text{thermal conductivity,} \\ c_p^* &= \text{specific heat at constant pressure,} \\ c_v^* &= \text{specific heat at constant volume,} \\ \gamma &= c_p^*/c_v^*, \\ s^* &= \sqrt{\frac{i\omega \rho^* c_p^*}{\kappa^*}}, \end{aligned}$$



$$\Gamma = \frac{\kappa(s a + 1)}{\cosh s^* a \cdot \kappa^*(s^* a - \tanh s^* a) + \sinh s^* a \cdot \kappa(s a + 1)} \quad (11)$$

(The quantities marked with and without \* are for the gas and the surrounding medium respectively.)

It is convenient to write the relation (10) in the form

$$-\omega \varrho_0 u_p = (G + iF) \delta p^*. \quad (12)$$

Since  $\kappa^*(s^* a \cosh s^* a) \ll \kappa(s a + 1) \sinh s^* a$  and  $\tanh s^* a \approx 1$  in the present experiments,  $F$  and  $G$  take the following forms,

$$aF = \frac{(k^* a)^2}{3\lambda} \left( 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma - 1}{l^* a} \cdot \frac{\sinh 2l^* a - \sin 2l^* a}{\cosh 2l^* a - \cos 2l^* a} \right),$$

$$aG = \frac{(k^* a)^2}{3\lambda} \cdot \frac{3(\gamma - 1)}{2l^* a} \times$$

$$\times \left( \frac{\sinh 2l^* a + \sin 2l^* a}{\cosh 2l^* a - \cos 2l^* a} - \frac{1}{l^* a} \right), \quad (14)$$

where

$$\lambda = \varrho^* / \varrho_0,$$

$$l^* = \sqrt{\frac{\omega \varrho^* c_p^*}{2\kappa^*}} \quad \text{or} \quad l^* = \frac{s^*}{1 + i}.$$

Determining  $A_0$  in (2) so as to satisfy the relation (12), we obtain

$$K_{1,0} = \frac{1}{a} \cdot \frac{aF(aF - 1) + (aG)^2}{(aG + k a \cdot aF)^2 + (aF - 1)^2}, \quad (15)$$

$$K_{2,0} = \frac{1}{a} \cdot \frac{aG + k a (aF)^2}{(aG + k a \cdot aF)^2 + (aF - 1)^2}, \quad (16)$$

which show the resonance to occur when

$$aF = 1. \quad (17)$$

Substituting (8), (9), (15) and (16) into (3), the radiation pressure is found as

$$\langle P \rangle = 2\pi \varrho_0 \frac{(k a)^2 + \frac{k a \cdot a G}{(a F)^2}}{\left( k a + \frac{a G}{a F} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{a F} \right)^2} \quad (18)$$

or

$$\langle P \rangle = \frac{4\pi I}{k^2 c} \cdot \frac{(k a)^2 + \frac{k a \cdot a G}{(a F)^2}}{\left( k a + \frac{a G}{a F} \right)^2 + \left( 1 - \frac{1}{a F} \right)^2}, \quad (19)$$

$I$  being the intensity of the incident sound. The formulae show that, corresponding to the pulsation resonance, the radiation pressure takes the maximum value

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{4\pi I}{k^2 c} \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{a G}{k a} \right)^2}, \quad (20)$$

where  $(k a)_v$  is given by Eq. (17) as

$$(k a)_v = \sigma (k^* a)_v \quad (21)$$

$$= \sigma \sqrt{3\lambda} \left( 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma - 1}{l^* a} \cdot \frac{\sinh 2l^* a - \sin 2l^* a}{\cosh 2l^* a - \cos 2l^* a} \right)^{-1/2}.$$

If, as in the present experiment, the last term in the bracket in (13) or (21) is negligible, we have

$$\langle P \rangle_{\max} = \langle P' \rangle_{\max} \frac{D_v}{D_v + D_{th}}, \quad (22)$$

$$\langle P' \rangle_{\max} = \frac{4\pi I}{k^2 c}, \quad (23)$$

$\langle P' \rangle_{\max}$  being the limiting value of  $\langle P \rangle_{\max}$ , when the thermal conductivity  $\kappa^* \rightarrow 0$ .  $D_{th}$  and  $D_v$  are respectively the logarithmic decrement of the resonant bubble arising from the heat conduction and from the scattering of the sound and by the sum  $D_v + D_{th}$  is given the logarithmic decrement of the resonant bubble due to the combined effect.  $D_{th}$  and  $D_v$  have respectively the forms

$$D_{th} = \pi G/F, \quad (24)$$

$$D_v = \sigma \sqrt{3\lambda}. \quad (25)$$

If  $\Delta(k a)$  is the width between two values of  $k a$ , at each of which  $\langle P \rangle$  falls to half of the peak value, and the sharpness  $Q_{RP}$  of the  $\langle P \rangle$ -( $k a$ ) curve is defined by the ratio  $(k a)_v / \Delta(k a)$ , we obtain from (18) or (19)

$$\frac{1}{Q_{RP}} = \frac{\Delta(k a)}{(k a)_v} = \frac{D_v + D_{th}}{\pi} = \frac{1}{Q_P}, \quad (26)$$

where  $Q_P$  is the “ $Q$  of the pulsation of the bubble”. In virtue of the last relation, we can determine the logarithmic decrement of the resonant bubble from the experiment on the radiation pressure.

### 3. Procedures and results of the experiment

#### a) Apparatus and procedures

The experimental arrangement is schematically shown in Fig. 1. A water tank of  $50 \times 35 \times 35$  cm<sup>3</sup> is lined with sheets of Acrilite, on which a number of rectangular cones of the same material, having a bottom area of 1 cm<sup>2</sup> and a height of 1.6–2.4 cm, are closely affixed. T is a piezoelectric composite transducer, serving as the sound source.

Bubbles of various dimensions are formed by electrolysis on a small platinum electrode P. When bubbles come up to the axial region of the sound beam, the switch in the transmitter circuit is closed and the train of sound waves is sent out.

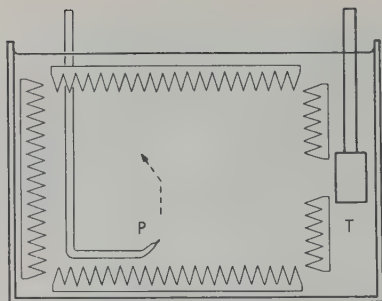


Fig. 1. The experimental arrangement.

The path of the bubble is then deflected and when the sound intensity is not too great, the motion is found to reach a stationary state in a short time.

Photographs of the tracks of the bubbles were taken by intermittent illumination, an example being shown in Fig. 2. When the sound intensity is too great, the tracks show zigzag figures.



Fig. 2. Tracks of  $H_2$  bubbles in water, the time interval of illumination being of 0.28 s. The radius of the bubble on the left: 0.052 mm. 70 kc/s approx.  $50 \mu W/cm^2$ . White spots are microscopic flow indicators.

Within the Fraunhofer region, the observations were made where the sound field as calculated was sufficiently close to plane progressive.

The upward velocity  $v_1$  in the absence of the sound and the horizontal component  $v_2$  of the terminal velocity in the sound field are measured on photographic prints.

From the upward velocity  $v_1$ , the radius of the bubble was determined assuming STOKES' law for the motion of spheres in viscous fluid. According to the work of ALLEN and others, departures from the Stokes velocity are negligibly small if

the radius is less than 0.06 mm in the temperature range of the present experiments in water.

From the horizontal component velocity  $v_2$ , the radiation pressure was determined by the formula

$$\langle P \rangle = 6\pi a \eta v_2$$

where  $\eta$  is the viscosity coefficient of water.

In order to distinguish the motion of the bubble relative to the fluid from that due to the direct flow caused in water by the second-order effect of the sound, a small amount of microscopic precipitate was suspended in water as flow indicator. The observation of the Tyndall light showed throughout the present experiments no trace of motion of these precipitates, even when the bubbles were in vigorous motion.

#### b) Results obtained in the plane progressive wave field

An example of the result obtained at 120 kc/s on  $O_2$  bubbles in water is shown in Fig. 3. The radius of the resonant bubble is found to be 0.027 mm and the sharpness  $Q_{RP}$  9.0, from which we obtain the logarithmic decrement of the resonant bubble as 0.35.

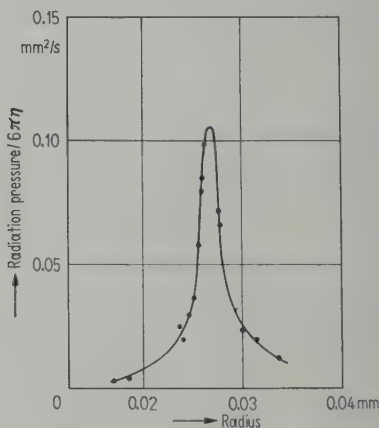


Fig. 3. The radiation pressure on  $O_2$  bubbles in water, at 120 kc/s,  $9^\circ C$ . The electric input to the transducer  $390 \mu W/cm^2$ .

The values obtained for the radius of the resonant bubbles are listed in the last column of Table I. The radii  $a_1$  in the table are calculated by the formula  $k^*a = \sqrt{3\lambda}$ . The radii  $a_2$  are obtained from the equation  $aF = 1$  and multiplied by  $\sqrt{1 + 2T/(ap)}$ ,  $T$  and  $p$  being respectively the surface tension of water and the prevailing hydrostatic pressure. The discrepancies observed with  $H_2$  bubbles may be attributed to their sensitiveness to contamination from water.



Table I  
The radius of the resonant bubble

Frequency in kc/s	Gas	Radius of the resonant bubble in mm		
		calc. $a_1$	calc. $a_2$	experimental
120	O <sub>2</sub>	0.0275	0.026 <sub>5</sub>	0.026 <sub>5</sub>
120	H <sub>2</sub>	0.027 <sub>5</sub>	0.023	0.025
70	O <sub>2</sub>	0.047	0.045	0.046
70	H <sub>2</sub>	0.047	0.042	0.045

Table II  
The logarithmic decrement of the resonant bubble

Frequency in kc/s	Gas	The log. dec. of the resonant bubble	
		calculated	experimental
120	O <sub>2</sub>	0.36	0.35
70	O <sub>2</sub>	0.33	0.32
70	H <sub>2</sub>	0.36	0.40

The values obtained for the logarithmic decrement of the resonant bubble are listed in the last column of Table II. The values of the decrement in the third column are calculated from known data by  $D_{th} + D_v$  using the expressions (24) and (25).

The agreement between the calculated and the observed values is considered as satisfactory. The latter are also indicated in Fig. 4.

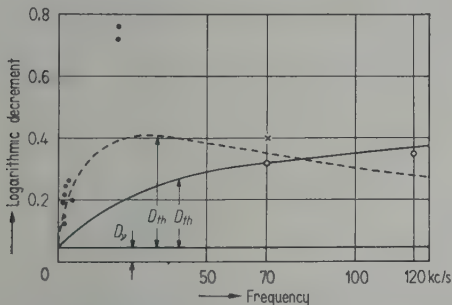


Fig. 4. The logarithmic decrement of resonant bubbles. Solid curve: calculated for O<sub>2</sub>. Broken curve: calculated for H<sub>2</sub>.  
● obtained by MEYER and TAMM for O<sub>2</sub>.  
○ obtained by the present experiment for O<sub>2</sub>.  
× obtained by the present experiment for H<sub>2</sub>.

### c) Results obtained in the plane stationary wave field

A plane reflector, made of sponge-gum sheet, was placed parallel to the wave front in the beam of the sound. O<sub>2</sub> bubbles of various dimensions were formed by electrolysis on a platinum wire electrode at the bottom of the tank. When

bubbles came up to the region in front of the reflector, the sound waves (of 69 kc/s) were transmitted. As is shown in Fig. 5 tracks of bubbles were photographed by intermittent illumination.

The reflection at the reflector surface was examined using a sonic interferometer and was found to be practically the same as that at the free surface. The reflector surface thus forms an antinodal plane, from which successive nodal and antinodal planes are located on photographic prints.

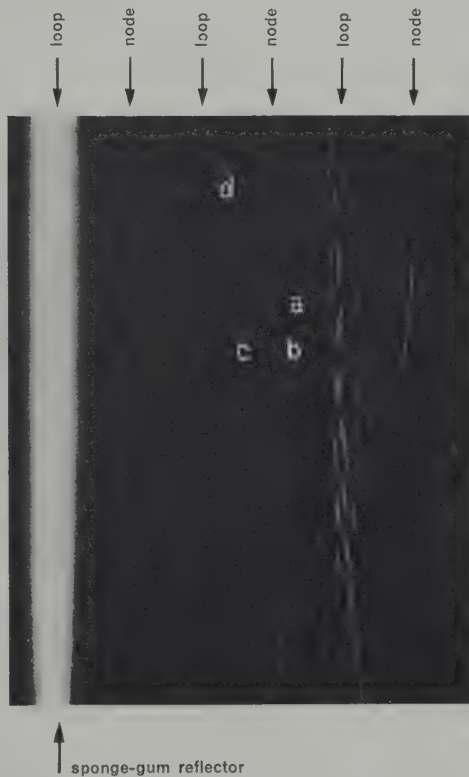


Fig. 5. The tracks of O<sub>2</sub> bubbles in the plane stationary field in water. Smaller bubbles than the resonant are accumulating at the nodes and those larger at the loops. The track a shows a penetrating resonant bubble. The bubble d is produced by the coalescence of b and c.

Examination of the tracks of bubbles showed clearly three groups of them (Fig. 5). The radii and the motional characters of some selected bubbles are listed in Table III. The bubbles of radii distinctly smaller than the radius of resonance accumulate at the nodes, those larger at the loops, quite in accordance with the authors' calculations.

The positions of the nodes and the loops are likely to have no effect upon the motion of the

Table III

The motional characters of  $O_2$  bubbles in the plane stationary field, 69 kc/s, in water. The radius of the resonant bubble: 0.046 mm

Radius (in mm)	Remark	Radius (in mm)	Remark	Radius (in mm)	Remark
0.025	to node	0.042	to node	0.057	to loop
0.028	to node	0.045	penetrating	0.067	to loop
0.032	to node	0.048	penetrating	0.07	to loop
0.038	to node	0.054	to loop		

resonant bubbles, which is characterized by the penetration of the latter through the nodes and the loops away from the source, the velocities observed being much slower than in the progressive field of equal mean energy density. This fact may be explained as follows.

If the sound field is perfectly plane stationary, the radiation pressure on the resonant bubble may vanish as in the theory. If any difference exists, as is usual, between the intensities of the component waves, the resonant bubble will proceed through the nodes and the loops in the direction of wave propagation of the stronger component. This view is supported by the fact that the penetrating motion is more vigorous in front of the somewhat weak reflector (metallic plate) than in front of the nearly perfect reflector (sponge-gum sheet).

In ultrasonic fields of low frequencies and of low intensities,  $k \cdot a$  of bubbles, produced by cavitation in the vicinity of the nodes, may be of small value and the chances of coagulation few. In such cases, the accumulation of the bubbles may be observed at the nodes only, as reported

by R. W. BOYLE, G. B. TAYLOR and D. K. FROMAN [5].

In ultrasonic fields of higher frequencies and of higher intensities, the lives of bubbles smaller than the resonant may be extremely short because of the frequent chances of coagulation. In such cases, the accumulation of the bubbles may be observed mainly at the loops, as reported by O. A. ANGERER and F. STREIBL [6] as well as G. E. GOLDMAN and G. R. RINGO [7].

It may further be expected that abrupt transitions of the bubbles may take place from the nodes towards the loops when the radii are increasing over that of resonance. In the authors' experiment at 460 kc/s and at the intensity of  $0.1 \dots 0.2$  W/cm<sup>2</sup>, the accumulations at the loops were distinctly observable in a test-tube, while it was very difficult, but not impossible, to discover the faint and unstable nodal accumulations and the transitions of bubbles towards the loops from the nodes.

A part of the present work was aided by the Scientific Research Expenditure Fund from the Department of Education.

(Received 12 January, 1955.)

#### References

- [1] MEYER, E. and TAMM, K., Akust. Z. **4** [1939], 145.
- [2] PFRIEM, H., Akust. Z. **5** [1940], 202.
- [3] SANEYOSHI, J., The Denki-gakkai Rombunshu **1** [1940], 290 (in Japanese).
- [4] YOSIOKA, K. and KAWASIMA, Y., Acustica **5** [1955], 167.
- [5] BOYLE, R. W., TAYLOR, G. B. and FROMAN, D. K., Trans. roy. Soc. Can. (3) **23** [1929], 187.
- [6] ANGERER, O. A. and STREIBL, F., Umschau **52** [1952], 300.
- [7] GOLDMAN, G. E. and RINGO, G. R., J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 270.

#### Buchbesprechung

O. WILMES, Lärmbekämpfung, Grundlagen und Übersicht. Gildeverlag, Alfeld/Leine 1954, 176 Seiten, 40 Abb., DIN A5, kartoniert DM 6,—.

Das vorliegende Büchlein stellt den ersten Band einer vom Deutschen Arbeitsring für Lärmbekämpfung herausgegebenen Schriftenreihe dar. Es enthält eine Auswahl von Vorträgen, welche von namhaften Fachleuten auf dem Hamburger Anti-Lärm-Kongreß im Jahre 1953 gehalten wurden.

Zur Kennzeichnung des Inhaltes seien kurz die behandelten Themen mitgeteilt: Einfluß des Lärms auf den menschlichen Organismus; Aufgaben und Aussichten der Betriebslärmbekämpfung; Meßtechnische Grundlagen der Lärmbekämpfung; Die Lästigkeit des Lärms; Schallschutz in Wohnbauten; Schallschutz auf Motorschiffen; Geräuschstärke und -messungen an Straßenfahrzeugen; Lärm und Verkehrssicherheit; Ursachen des Lärms im Eisenbahn-

verkehr und Erfolge in der Lärmabwehr; Lärmbekämpfung in der Luftfahrt; Rechtsgrundlagen der Lärmbekämpfung; Administrative Maßnahmen gegen den Lärm.

Es liegt hier ein Übersichtswerk vor, das sich in knapper Form mit den medizinischen, technischen und juristischen Fragen der Auswirkung und Bekämpfung des Lärms befaßt. So bietet es vor allem dem interessierten Laien, der Maßnahmen zur Lärminderung ergreifen will, einen guten Überblick über den Stand der Entwicklung auf diesem Gebiet. Aber auch der Fachmann wird diesen zusammenfassenden Bericht begrüßen, insbesondere wird den mit den technischen Problemen bereits vertrauten Leser die Behandlung rechtlicher und medizinisch-psychologischer Probleme interessieren. Durch die Mitteilung von Diskussionsbeiträgen wird die Lebendigkeit der Darstellung noch erhöht, und es werden jeweils die aktuellsten Fragen berührt.

Wolfgang Westphal



# THE ATTENUATION OF SOUND IN A TURBULENT ATMOSPHERE OVER A DESERT TERRAIN

by M. MOKHTAR and M. A. MAHROUS

University of Cairo and University of Ain Shams respectively, Egypt

## Summary

The effect of atmospheric turbulence on the overall sound intensity received downwind of a source at different distances from it and at various heights above the ground was investigated. The results revealed the occurrence of a zone of maximum intensity followed by another of minimum intensity at a higher level. The effect of "eddies" formed in the turbulent atmosphere on the diffraction pattern of the source was studied.

## Sommaire

On a étudié l'influence d'une turbulence de l'atmosphère sur l'intensité sonore totale reçue en aval d'une source, à différentes distances de celle-ci, et à différentes hauteurs au-dessus du sol. Il existe, d'après les résultats obtenus, une zone d'intensité maxima, suivie d'une autre zone d'intensité minima, à un niveau plus élevé. On a étudié l'influence des tourbillons de l'atmosphère turbulente sur le diagramme de diffraction de la source.

## Zusammenfassung

Die Wirkung atmosphärischer Turbulenzen auf die Schallausbreitung in Windrichtung wurde untersucht, indem man die Schallintensität in verschiedenen Abständen von der Schallquelle und in verschiedenen Höhen vom Erdboden bestimmte. Dabei ergab sich eine Zone maximaler Intensität, der in größerer Höhe eine Zone minimaler Intensität folgte. Weiterhin wurde der Einfluß von „Wirbeln“, die sich in der turbulenten Atmosphäre bilden, auf die Richtcharakteristik der Schallquelle untersucht.

## 1. Introduction

A great deal of experimental research work in recent years has been devoted to the study of fluctuations in sound intensity received from a source of constant output in the atmosphere. It is clear that the additional attenuation which an open-air sound suffers as compared to an indoor one is due to turbulence in the atmosphere resulting in local fluctuations in temperature, pressure and wind speed. Results of observations are usually stated in one of two ways; either as mean values of sound intensity recorded during intervals extending over a few minutes (during which the average meteorological conditions are noted) or as instantaneous values of both sound and meteorological conditions. Each type of observations has its merits. The former method is used when a study of overall intensity is needed for giving an average picture to be used for sound ranging or signalling over different terrains at different times of the day. Instantaneous recording is used to give a picture of correlated events occurring simultaneously. The early investigators on the propagation of sound in the atmosphere adopted the large-scale recording method and explained their results in terms of the mean values of the prevailing meteorological conditions.

BEHRENS [1] gave a comprehensive summary of the theory of sound diffraction caused by wind and temperature gradients. KOMERALL [2] dealt with the effect of temperature gradients on the sound path. EAGLESON [3] and others studied the effect of temperature, wind and humidity on sound over distances ranging up to 200 meters.

Working with both types of observations, RICHARDSON [4] has recently studied the fine structure of a turbulent atmosphere in relation to the propagation of sound therein. He investigated also the overall sound attenuation at different levels from the ground for two types of terrain of different natures. The Authors [5] in a previous investigation studied the effect of wind, lapse rate and scale of turbulence on sound propagation over a desert terrain.

The work described herewith comprises two more investigations and is complementary to the previous work. The next section deals with the estimation of overall sound attenuation at various distances downwind and at various heights above a sandy terrain. The concluding section deals with the effect of "eddy diffusion" in a turbulent atmosphere on sound propagation.

## 2. Overall attenuation of sound

The overall loss in the intensity of sound in the atmosphere is mainly due to three factors, namely, (a) the spreading which takes place in accordance with the inverse square law of distance  $r$ , amounting to  $20 \log r$  dB, (b) the molecular absorption which is controlled by the physical and chemical constitution of the air and (c) the scattering caused by the reflection, refraction and diffraction effects and enhanced by gustiness of wind, eddy formation, adiabatic lapse rate and roughness of terrain. Factors (a) and (b) are now fairly well established. For the study of the third factor the authors have adopted the large-scale averaging method, in view of the fact that the nature of such a problem dealing with turbulence necessitates that averages only be subjected to analysis. Moreover, the recording of the meteorological conditions had to be done by instruments which yield mean values over finite time intervals.

The experiments were conducted on summer days at a site North-East of Cairo over a desert terrain which was almost free from obstructions. The source of sound used was a loudspeaker actuated by a beat frequency oscillator (General Electric type 913) producing a pure tone. The

output of the oscillator was led into an amplifier and then to a matched loudspeaker unit. The sound was received by a small crystal microphone whose output was passed to a sound level meter (General Radio type 759) having a slow response, so that a time average of intensity could be recorded. To reduce the background noise, the signal received was passed through a sharply tuned wave analyser acting as a filter (General Radio type 736A). The intensity close to the source was about 95 dB. The source was placed at different heights from the ground ranging from 1 to 6 feet. The microphone was placed at the same height as the source and the distance between the two varied from 20 to 100 feet. Frequencies between 1 and 5 kc/s were used. The mean value of the wind speed was recorded for each observation at the same height as the sound beam. The difference of temperature was also recorded between heights of 1 and 4 feet from the ground.

Results for overall sound intensity are exhibited in Fig. 1. The general behaviour of most of the curves differs from that in RICHARDSON's results (cf. Fig. 6 of [6]) which had been carried out under different meteorological conditions, namely under less gusty weather, low humidity and small lapse rate. Few of our graphs are similar

to his, possibly because of temporary local uniformity at the time of measurement.

Summer desert conditions are characterised by high lapse rate especially in the hours round noon. This results in the formation of strong eddy convection currents which give this characteristic behaviour to the curves. Such behaviour can be explained on the basis that

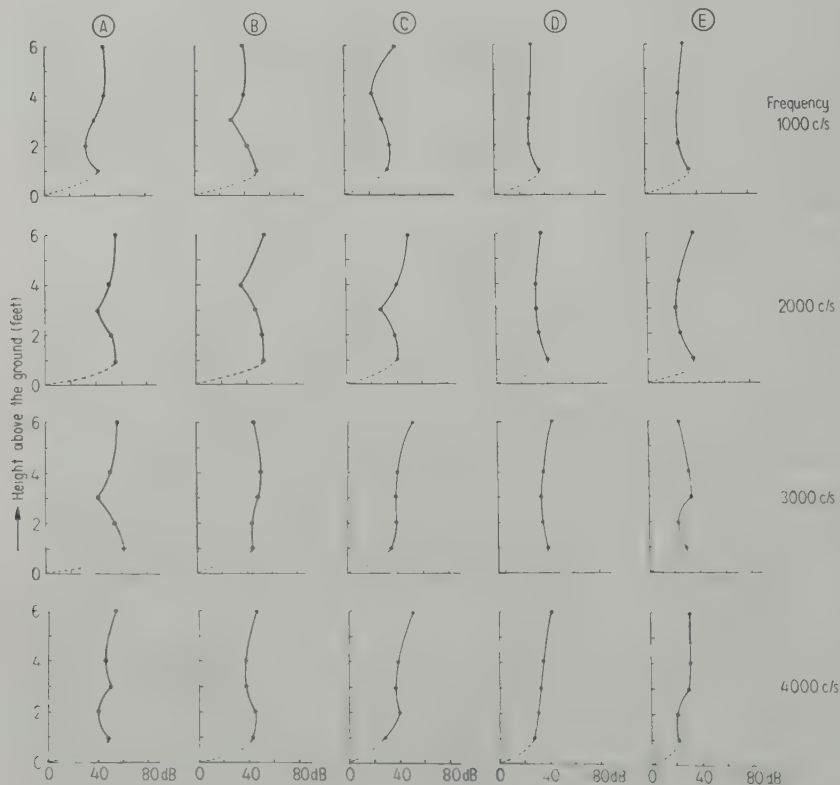


Fig. 1. The overall sound intensity for the frequencies 1, 2, 3, and 4 kc/s at different heights above ground and at various distances from source (A: 20 ft, B: 40 ft, C: 60 ft, D: 80 ft, E: 100 ft).



large sound dissipation takes place at ground level due to absorption by sound while in the layers just above, the intensity increases rather quickly and is further assisted by the sound reflected from the sand which is almost in phase with the direct beam. At a higher level, the ground dissipation disappears, but phase difference between the direct and the reflected beams starts to develop resulting in a reduction of the intensity. Moreover, deviation of path takes place due to refraction in these layers; the actual path being approximately parabolic. Wind gradients tend to decrease the overall sound intensity picked-up, shown by the concave part of the curve and these effects are more marked the greater the lapse rate. In the figures shown, the minima occurred at a height of 2 to 4 feet above ground level, when the lapse rate was at its maximum. At a higher level still, the phase difference changes sign once more and intensification is produced; at the same time, the upward refraction decreases due to the gradual fall in lapse rate with height. If observations are continued at higher levels still, another minimum, but less marked, is likely to appear.

### 3. The effects of eddy diffusion on sound propagation

Turbulence in general is a direct consequence of high lapse rate, and implies a state in which the instantaneous wind velocities exhibit irregular and random fluctuations. Such fluctuations take the form of "eddies" having a size ranging from a few inches up to several feet.

In order to demonstrate the role of eddy diffusion on the propagation of sound, measurements of intensity were taken in horizontal planes across the sound beam downwind, using a small condenser microphone and frequencies ranging from 1 to 5 kc/s. The common height of source and receiver was varied from 2 to 6 feet above ground, while the distance of the line of cross traverse of the microphone from the source was maintained at 5 feet. Sample results for a frequency of 3000 c/s are plotted in Fig. 2 in which the theoretical diffraction pattern corresponding to a baffled piston source is drawn as a thick broken line for comparison.

It is clearly seen from the figure that the outdoor observations, while approximately maintaining the general diffraction pattern, exhibit certain departures from it, such as:

(a) The maximum intensities of the main central beam fall below that recorded under exactly similar conditions in an anechoic chamber free from turbulence.

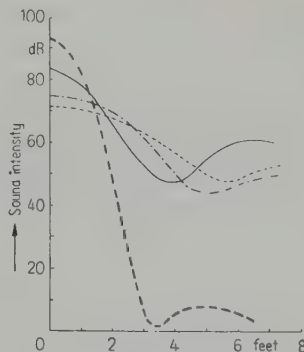


Fig. 2. Effect of "eddy" diffusion on sound diffraction in turbulent atmosphere;  
— 2 ft above ground,  
— 4 ft above ground,  
— 6 ft above ground,  
— assumed theoretical distribution.

- (b) The maximum intensities of the diffracted beam are definitely higher than their corresponding values in the theoretical curve.
- (c) The minimum intensities in the experimental curves are not zero as required by theory.
- (d) The bearing of the outdoor minima from line ahead is greater than that calculated from the theoretical relation  $\sin \theta = 0.61 \lambda / R$  where  $\lambda$  is the wave-length and  $R$  is the radius of the source, and  $\theta$  is the angle to the first minimum.

At high levels above the ground the "wings" tend to broaden out.

Summing up all these effects, we may conclude that atmospheric turbulence results in general loss in overall intensity of the direct beam and smudging of peaks of the diffracted "wings", thus indicating that the phenomenon is essentially one of scattering rather than one of simple refraction.

The authors hope to investigate the effect of negative lapse rate on sound propagation and to extend their observations to cover higher levels than hitherto explored.

### Acknowledgements

The authors express their thanks to the Principal of the English School at Heliopolis, Cairo, for permission to use the school playgrounds for carrying out the experiments.

(First received 26th April, 1954; revised 8th February, 1955.)

### References

- [1] BEHRENS, P., Über Refraktion von Schallstrahlen in der Atmosphäre, Dissertation Universität Rostock 1905.
- [2] KOMMERALL, V., Phys. Z. **18** [1916], 172.
- [3] EAGLESON, H. V., J. acoust. Soc. Amer. **12** [1941], 427.
- [4] RICHARDSON, E. G., Proc. roy. Soc. A. **203** [1950], 149.
- [5] MOKHTAR, M. and MAHROUS, M. A., Proc. math. phys. Soc. Egypt. **4** [1951], 63.

# MESSUNGEN DER REFLEXION VON BIEGEWELLEN AN QUERSCHNITTSSPRÜNGEN AUF STÄBEN

von MUGIONO\*

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit dient der Untersuchung der Ausbreitung von Biegewellen in Bauelementen. In der eindimensionalen Vereinfachung, nämlich für Biegewellen auf Stangen, wurden die an einfachen und doppelten Querschnittssprüngen auftretenden Reflexionen theoretisch berechnet und experimentell gemessen. Experiment und Theorie zeigen befriedigende Übereinstimmung.

## Summary

The aim of this work was the investigation of the propagation of flexural waves in building structures. In the simplified one-dimensional case, i. e. for flexural waves in rods, the reflection coefficient for single and double changes in cross-section has been calculated and measured. Experiment and theory show good agreement.

## Sommaire

Le présent travail est destiné à faciliter l'étude de la propagation des ondes de flexion dans les éléments de construction. On a calculé théoriquement et mesuré expérimentalement, dans le cas unidimensionnel simple, c'est-à-dire pour des ondes de flexion dans des verges, les réflexions qui ont lieu à des discontinuités de section simple ou double. Les résultats expérimentaux et théoriques sont en accord satisfaisant.

## 1. Einleitung

Die Fortleitung von Biegewellen auf Wänden und anderen Bauelementen ist für die Bauakustik von großem Interesse, da die Schalldämmung zwischen zwei Räumen stets, unabhängig von der Stärke der Trennwand, durch die Schallabstrahlung der zu Biegeschwingungen erregten gemeinsamen Seitenwände eine obere Grenze findet. Darüber hinaus spielen auch die auf der Trennwand selbst angeregten Biegewellen (Koinzidenzeffekt) eine wichtige Rolle. Für die Planung von Bauten ist es deshalb wichtig, Klarheit zu schaffen über die Ausbreitungsbedingungen für Biegewellen in Bauelementen allgemein und über die Reflexion von Biegewellen an Isoliermaterialien, Ecken und Querschnittssprüngen im besonderen. Theoretisch wurden die hierbei auftretenden Probleme von L. CREMER [1] eingehend behandelt. Experimentelle Untersuchungen machten EXNER und BÖHME [2], die an Stäben die Schalldämmung von zwischengeschalteten Isoliermaterialien maßen und KURTZE, TAMM und VOGEL [3], die die Ausbreitungsverhältnisse an Ecken mit und ohne zwischengeschaltete Isolierstoffe wiederum an Hand von Stabmodellen studierten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der durch einfache und doppelte Querschnittssprünge hervorgerufenen Schalldämmung bzw. Reflexion für Biegewellen. Untersucht wird wie in den vorerwähnten Arbeiten der eindimensionale Fall, indem die Messungen an Stäben ausgeführt werden. Gemessen wurde an folgenden Anordnungen:

### a) Einfacher Querschnittssprung (Abb. 1)

In dem skizzierten Stab, dessen Querschnitt an der Stelle  $x = 0$  bei gleichbleibender Breite von dem Wert  $h_1$  seiner Höhe auf den Wert  $h_2$  diskontinuierlich springt, werden am linken Ende Biegewellen (in der Zeichenebene) erregt, die sich über den Querschnittsprung hinweg nach rechts fortpflanzen.

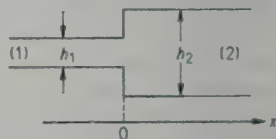


Abb. 1.

Das rechte Stabende ist (siehe unter „Meßverfahren“) reflexionsfrei abgeschlossen. Die an der Sprungstelle reflektierten Biegewellen werden gemessen.

### b) Doppelter Querschnittssprung (Abb. 2)

Hier tritt der gleiche Querschnittssprung  $\alpha = h_2/h_1 = h_2/h_3$  doppelt auf, und zwar wurde

\* Djokjakarta, Indonesien.



sowohl der Fall einer Querschnittserweiterung als auch der einer entsprechenden Querschnittsverengung untersucht, wobei sich die Fragestellung auf die Abhängigkeit des Reflexionsfaktors von  $\alpha$  und dem Abstand  $l$  zwischen den beiden Querschnittssprüngen bezieht.

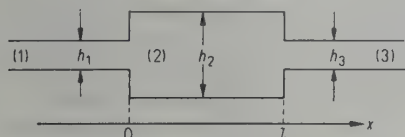


Abb. 2.

## 2. Theorie

### Fall a)

Die Wellengleichung für Biegeschwingungen lautet<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{v}_y, \bar{w}_z, \bar{M}_z, \bar{F}_y) = -\frac{B}{m} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\bar{v}_y, \bar{w}_z, \bar{M}_z, \bar{F}_y), \quad (1)$$

wobei  $x$  die Fortpflanzungsrichtung,  $v_y$  die Schnelle in  $y$ -Richtung,  $w_z$  die Winkelgeschwindigkeit um die  $z$ -Richtung,  $M_z$  das Biegemoment um die  $z$ -Achse,  $F_y$  die Kraft in  $y$ -Richtung,  $B$  die Biegesteifigkeit und  $m$  die Masse pro Längeneinheit in  $x$ -Richtung darstellen.

Für sinusförmige Erregung können wir setzen

$$\bar{v}_y = A_v e^{j(\omega t - kx + \varphi)}.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$Bk^4 = m\omega^2$$

und wegen  $\omega/k = c_B$  ( $k = 2\pi/\lambda_B$ ,  $c_B$  = Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Biegewellen)

$$c_B = \sqrt[4]{B/m} \sqrt{\omega}, \quad (2)$$

Im vorliegenden Fall gilt mit dem Elastizitätsmodul  $E$ , der Dichte  $\rho$  und der Stabhöhe  $h$ :

$$c_B = \sqrt[4]{\frac{E}{12\rho}} \sqrt{h\omega}, \quad (3)$$

$$\lambda_B = 2\pi \sqrt[4]{\frac{E}{12\rho}} \sqrt{\frac{h}{\omega}}. \quad (4)$$

Setzen wir als Lösung für die Differentialgleichung  $\bar{v}_y(x, t) = \bar{v}_y(x) e^{j\omega t}$ , so erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{B}{m} \frac{d^4 \bar{v}_y(x)}{dx^4} = \omega^2 \bar{v}_y(x) \quad (5)$$

mit der Lösung

$$\bar{v}_y(x) = \bar{A}_1 e^{-jkx} + \bar{A}_2 e^{jkx} + \bar{B}_1 e^{-kx} + \bar{B}_2 e^{kx}, \quad (6)$$

Bei dem in Abb. 1 dargestellten diskontinuierlichen Übergang müssen an der Übergangsstelle die folgenden vier Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{y1} &= \bar{v}_{y2}, & \bar{w}_{z1} &= \bar{w}_{z2}, \\ \bar{F}_{y1} &= \bar{F}_{y2}, & \bar{M}_{z1} &= \bar{M}_{z2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Bei Biegewellenerregung am linken Stabende wird an der Übergangsstelle ein Teil der Biege wellen reflektiert und der Rest durchgelassen:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{y1} &= e^{-jk_1 x} + \bar{R} e^{+jk_1 x} + \bar{R}' e^{+k_1 x}, \\ \bar{v}_{y2} &= \bar{D} e^{-jk_2 x} + \bar{D}' e^{-k_2 x}, \end{aligned} \quad (8)$$

Substitution der Gleichungen (8) in (7) liefert, unter Berücksichtigung der Beziehungen  $\bar{v}_y = d\bar{y}/dt$ ,  $\bar{w}_z = d\bar{v}_y/dx$ ,  $\bar{M}_z = -(B/j\omega) d\bar{w}_z/dx$  und  $\bar{F}_y = -d\bar{M}_z/dx$ , die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{R} + \bar{R}' - \bar{D} - \bar{D}' &= -1, \\ j\bar{R} + \bar{R}' + jK\bar{D} + K\bar{D}' &= j, \\ -\bar{R} + \bar{R}' + \psi\bar{D} - \psi\bar{D}' &= 1, \\ -j\bar{R} + \bar{R}' - jK\psi\bar{D} + K\psi\bar{D}' &= -j, \end{aligned} \quad (9)$$

worin  $K$  und  $\psi$  die folgenden Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} K &= k_2/k_1 = \sqrt[4]{m_2 B_1/m_1 B_2} = \lambda_1/\lambda_2, \\ \psi &= k_2^2 B_2/k_1^2 B_1 = \sqrt{m_2 B_2/m_1 B_1}. \end{aligned}$$

Für den Fall, daß an der Übergangsstelle nur eine Durchmesser- aber keine Materialänderung auftritt, ist

$$K = \alpha^{-1/2} \quad \text{und} \quad \psi = \alpha^2.$$

Als Lösung der Gleichungen (9) ergibt sich

$$\bar{R} = \frac{2\psi(1-K^2) - jK(1-\psi)^2}{K(1+\psi)^2 + 2\psi(1+K^2)}. \quad (10)$$

Der durchgelassene Bruchteil der Energie ist  $d = 1 - |\bar{R}|^2$ . Definieren wir als Reduktionsfaktor  $[R] = 10 \log(1/d)$ , so gilt

$$[R] = 10 \log \left( \frac{\alpha^{-5/4} + \alpha^{-3/4} + \alpha^{3/4} + \alpha^{5/4}}{\frac{1}{2}\alpha^{-2} + \alpha^{-1/2} + 1 + \alpha^{1/2} + \frac{1}{2}\alpha^2} \right)^{-2} \quad (11)$$

und haben damit die Lösung für den ersten Fall in der Form

$$[R] = f(\alpha).$$

### Fall b)

Betrachten wir zunächst beliebige Querschnittsprünge (Abb. 3), so gilt:

<sup>1</sup> Der Querstrich über den Zeichen bedeutet, daß es sich um komplexe Größen handelt.

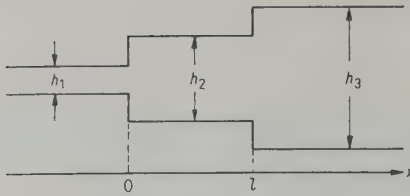


Abb. 3.

$$\begin{aligned}\bar{v}_{y1} &= e^{-jk_1 x} + \bar{R}_1 e^{+jk_1 x} + \bar{C}_1 e^{+k_1 x}, \\ \bar{v}_{y2} &= \bar{A}_2 e^{-jk_2 x} + \bar{R}_2 e^{+jk_2 x} + \bar{C}_2 e^{-k_2 x} + \bar{C}_2' e^{k_2(x-l)}, \\ \bar{v}_{y3} &= \bar{A}_3 e^{-jk_3(x-l)} + \bar{C}_3 e^{-k_3(x-l)}.\end{aligned}\quad (12)$$

Zweimalige Anwendung der Gleichungen (12) für  $x=0$  und für  $x=l$  liefert die acht Gleichungen:

$$\begin{aligned}1 + \bar{R}_1 + \bar{C}_1 &= \bar{A}_2 + \bar{R}_2 + \bar{C}_2 + \bar{C}_2' e^{-k_2 l}, \\ \bar{A}_2 e^{-jk_2 l} + \bar{R}_2 e^{+jk_2 l} + \bar{C}_2 e^{-k_2 l} + \bar{C}_2' &= \bar{A}_3 + \bar{C}_3, \\ k_1(-j + j\bar{R}_1 + \bar{C}_1) &= k_2(-j\bar{A}_2 + j\bar{R}_2 - \bar{C}_2 + \bar{C}_2' e^{-k_2 l}), \\ k_2(-j\bar{A}_2 e^{-jk_2 l} + j\bar{R}_2 e^{+jk_2 l} - \bar{C}_2 e^{-k_2 l} + \bar{C}_2') &= k_3(-j\bar{A}_3 - \bar{C}_3), \\ \frac{B_1 k_1^2}{j\omega}(-1 - \bar{R}_1 + \bar{C}_1) &= -\frac{B_2 k_2^2}{j\omega}(-\bar{A}_2 - \bar{R}_2 + \bar{C}_2 + \bar{C}_2' e^{-k_2 l}), \\ -\frac{k_2^2 B_2}{j\omega}(-\bar{A}_2 e^{-jk_2 l} - \bar{R}_2 e^{+jk_2 l} + \bar{C}_2 e^{-k_2 l} + \bar{C}_2') &= \frac{k_3 B_3}{j\omega}(-\bar{A}_3 + \bar{C}_3), \\ \frac{k_1^3 B_1}{j\omega}(+j - j\bar{R}_1 + \bar{C}_1) &= \frac{k_2^3 B_2}{j\omega}(+j\bar{A}_2 - j\bar{R}_2 - \bar{C}_2 + \bar{C}_2' e^{-k_2 l}), \\ \frac{k_2^3 B_2}{j\omega}(+j\bar{A}_2 e^{-jk_2 l} - j\bar{R}_2 e^{+jk_2 l} - \bar{C}_2 e^{-k_2 l} + \bar{C}_2') &= \frac{k_3^3 B_3}{j\omega}(j\bar{A}_3 - \bar{C}_3).\end{aligned}\quad (13)$$

Setzen wir jetzt  $h_3 = h_1$ , also  $K = k_2/k_1 = k_2/k_3 = \alpha^{-1/2}$  und  $\psi = k_2^2 B_2/k_1^2 B_1 = k_2^2 B_2/k_3^2 B_3 = \alpha^2$ , und vernachlässigen wir alle Terme mit  $e^{-k_3 l}$ , so ergeben sich schließlich die acht nächsten Gleichungen mit den acht Unbekannten  $\bar{R}_1, \bar{C}_1, \bar{A}_2, \bar{R}_2, \bar{C}_2, \bar{C}_2', \bar{A}_3, \bar{C}_3$ , aus denen  $\bar{R}_1$ , die Amplitude der reflektierten Welle, ausgerechnet werden kann. Die genannte Vernachlässigung ist

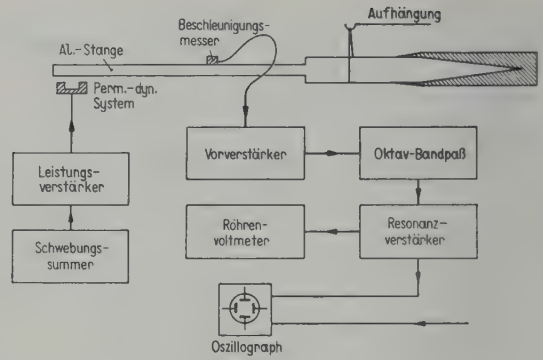


Abb. 4. Blockschaltbild der Meßanordnung.

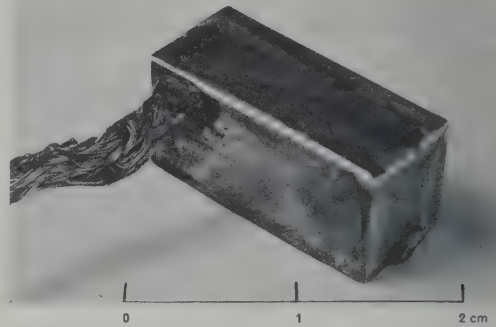


Abb. 5. Das benutzte Körperschallmikrophon.

erlaubt, da bei den Versuchen  $l$  so gewählt wurde, daß  $3\pi \leq k_2 l$  ist und damit  $e^{-k_3 l} \leq 10^{-4}$ . EXNER und BÖHME [2] zeigen außerdem, daß das Nahfeld bereits in einem Abstand von  $\lambda$  von der Übergangsstelle nicht mehr meßbar ist. Im vorliegenden Fall wurde  $l \geq 1,5 \lambda$  gewählt:

$$\begin{aligned}\bar{R}_1 + \bar{C}_1 - \bar{C}_2 - \bar{A}_2 - \bar{R}_2 &= -1, \\ j\bar{R}_1 + \bar{C}_1 + K\bar{C}_2 + jK\bar{A}_2 - jK\bar{R}_2 &= j, \\ -\bar{R}_1 + \bar{C}_1 - \psi\bar{C}_2 + \psi\bar{A}_2 + \psi\bar{R}_2 &= 1, \\ -j\bar{R}_1 + \bar{C}_1 + K\psi\bar{C}_2 - jK\psi\bar{A}_2 + jK\psi\bar{R}_2 &= -j, \\ +e^{-jk_2 l}\bar{A}_2 + e^{jk_2 l}\bar{R}_2 + \bar{C}_2' - \bar{A}_3 - \bar{C}_3 &= 0, \\ -jK e^{-jk_2 l}\bar{A}_2 + jK e^{jk_2 l}\bar{R}_2 + K\bar{C}_2' + j\bar{A}_3 + \bar{C}_3 &= 0, \\ -\psi e^{-jk_2 l}\bar{A}_2 - \psi e^{jk_2 l}\bar{R}_2 + \psi\bar{C}_2' + \bar{A}_3 - \bar{C}_3 &= 0, \\ +jK\psi e^{-jk_2 l}\bar{A}_2 - & \\ jK\psi e^{jk_2 l}\bar{R}_2 + K\psi\bar{C}_2' - j\bar{A}_3 + \bar{C}_3 &= 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Als Lösung ergibt sich für  $\bar{R}_1$ :

$$\begin{aligned}\bar{R}_1 &= \frac{2N(M + jL)e^{-jk_2 l} - 2(L + jM)jNe^{-jk_2 l}}{jN^2 e^{+jk_2 l} - (L + jM)(-M + jL)e^{-jk_2 l}} \\ &= \frac{2N(M \cos k_2 l - L \sin k_2 l)}{[2LM \cos k_2 l - (L^2 - M^2 + N^2) \sin k_2 l] - j[(L^2 - M^2 - N^2) \cos k_2 l + 2LM \sin k_2 l]}\end{aligned}\quad (15)$$



mit  $L = 2 \psi (1 - K^2)$ ,

$$M = K(1 - \psi)^2,$$

$$N = K(1 + \psi)^2 + 2 \psi(1 + K^2),$$

$$\alpha = h_2/h_1 = h_2/h_3, \quad \psi = \alpha^2, \quad K = \alpha^{-1/2}.$$

Aus der Bedingung:  $M \cos k_2 l - L \sin k_2 l = 0$  ergibt sich die Wellenlänge, für die der Reflexionsfaktor verschwindet. Man sieht, daß diese Wellenlänge nicht nur von der Länge  $l$  des Übergangsstückes abhängt, sondern auch vom Querschnittsverhältnis  $\alpha$ ;  $R_1 = 0$  für  $k_2 l = \arctg M/L$ .

### 3. Meßverfahren

Die benutzte Meßanordnung ist im Blockschaltbild in Abb. 4 wiedergegeben. Die benutzten Stäbe sind 3...4 m lange, relativ verlustarme Duraluminiumstangen, die an dünnen Fäden aufgehängt wurden. Die Fäden wurden gegen die Stative und diese wiederum gegen den Fußboden mit Weichgummi isoliert. Für die Messungen wurde ein kleines Kristallmikrophon (Beschleunigungsmesser nach H. OBERST) verwendet, das durch seine geringe Masse die Wellenausbreitung auf der Stange nicht beeinträchtigt (Abb. 5). Das Gehäuse des Mikrophons besteht aus Elektron; der Kristall ist ein einseitig eingespannter ADP-Bieger, der feuchtigkeitsunempfindlich ist.

Empfangsseitig wurde zur Erhöhung der Meßempfindlichkeit ein Oktav-Bandpaß und ein RC-Resonanzverstärker benutzt. Die Frequenzmessung erfolgte mit Hilfe von Lissajous-Figuren unter Benutzung einer Quarzuhr-Normalfrequenz von 500 Hz auf dem Bildschirm eines Oszillographen.

Für die Messungen muß das rechte, vom Sender abgewandte Stangenende unendlich lang, d. h. reflexionsfrei abgeschlossen sein. Ein solcher reflexionsfreier Abschluß kann z. B. dadurch erzielt werden, daß man das Stangenende keilförmig schneidet und in einen mit Sand [2] oder Sägemehl gefüllten Trog einführt; man kann auch das keilförmige Stangenende mit einem Entdröhnungsmittel (wir haben ein Gemisch von Sand und Gummilösung im Gewichtsverhältnis 4 : 1 genommen) umgeben [4]. Beide Abschlüsse erwiesen sich als ausreichend reflexionsfrei, d. h., die Reflexionsfaktoren waren bei den benutzten Frequenzen kleiner als 10 %.

Als Sender wurde ein kräftiges permanentdynamisches System benutzt, dessen Schwingungsspele fest mit der Stange verbunden war. Die Schwingungsrichtung der angeregten BiegeWellen war stets die y-Richtung, d. h. die Richtung, in der die Stabmaße verändert wurden (Abb. 4).

Gemessen wurde immer der Reflexionsfaktor des Querschnittssprunges, und zwar durch Abtasten des senderseitigen Stangenteiles mit dem Beschleunigungsempfänger. Aus den Minima und Maxima der hier auftretenden stehenden Wellen ergibt sich der Reflexionsfaktor  $R$  nach der bekannten Formel

$$R = \frac{1 - d'}{1 + d'},$$

mit  $d' = v_{min}/v_{max}$ , dem Verhältnis der Schnellen bzw. Beschleunigungen in Minimum und Maximum.

### 4. Meßergebnisse

Fall a)

Mit einer Aluminiumstange entsprechend Abb. 1, bei der der rechte Stangenteil ( $h_2$ ) quadratischen Querschnitt hat, wurden Messungen für verschiedene Höhen  $h_1$  des linken, senderseitigen Stangenteiles gemacht.  $h_2$  betrug 40 mm und  $h_1$  wurde variiert entsprechend  $\alpha = h_2/h_1 = 2; 5$  und 11,4. Für die einzelnen Fälle wurde der Reduktionsfaktor  $[R] = 10 \log(1/d)$  berechnet, wobei  $d = 1 - R^2$  den Bruchteil der einfallenden Energie darstellt, der durchgelassen wird. Es ergaben sich die folgenden Meßwerte:

$\alpha = 2$		$\alpha = 5$		$\alpha = 11,4$	
Hz	[R]	Hz	[R]	Hz	[R]
500	0,26	500	4,1	500	8,0
1000	0,22	1000	3,3	1000	8,5
1500	0,48	1500	3,5		
2000	0,46	2000	3,1		

Bei  $\alpha = 11,4$  wurde nur bis 1000 Hz gemessen, da bei höheren Frequenzen wegen der kleinen Schallgeschwindigkeit auf der dünnen Stange die Wellenlänge nicht mehr groß gegen die Maße des Kristallmikrophons ist.

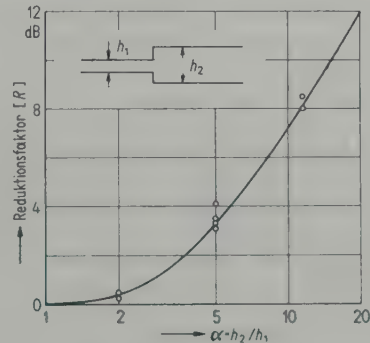


Abb. 6. Reduktionsfaktor  $[R]$  als Funktion des Querschnittsverhältnisses  $\alpha$ . Die ausgezogene Kurve ist berechnet, die Punkte geben die Meßresultate wieder.

Die theoretische Berechnung von  $[R]$  liefert:

$\alpha$	$[R]$
2	0,3
5	3,2
11,4	8,3

Der Reduktionsfaktor  $[R]$  ist also theoretisch unabhängig von der Wellenlänge. Die bei den Messungen beobachteten Abweichungen sind aus Abb. 6 ersichtlich, in der die ausgezogene Kurve die theoretischen Werte und die Punkte die Resultate der Messungen wiedergeben.

Fall b)

Die Wellenlänge der Biegewellen ist gegeben durch

$$\lambda_B = 2\pi \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \cdot \sqrt{\frac{h}{\omega}}.$$

In diesem Fall<sup>2</sup> haben wir eine sehr verlustfreie Messingstange benutzt, bei der sich experimentell ergab:

$$\lambda_B = 198 \sqrt{h/\omega}.$$

Wählt man nun  $h_1 = h_3 = 10$  mm und  $h_2 = 15$  mm (Abb. 2), so muß die Länge  $l$  des Zwischenstückes so gewählt werden, daß  $k_2 l \geq 3\pi$  ist. Nimmt man  $l = 750$  mm, dann ist

$$\begin{aligned} \text{bei } 360 \text{ Hz: } k_2 l &= 3,00\pi, \\ \text{bei } 821 \text{ Hz: } k_2 l &= 4,40\pi. \end{aligned}$$

Die für diesen Fall gemessenen Werte sind zusammen mit der theoretischen Kurve in Abb. 7a wiedergegeben.

In einem zweiten Versuch wurde eine Querschnittsverengung mit  $\alpha = 0,52$  gemessen. Mit  $l = 750$  mm ist

$$\begin{aligned} \text{bei } 406 \text{ Hz: } k_2 l &= 5,30\pi, \\ \text{bei } 690 \text{ Hz: } k_2 l &= 6,90\pi. \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Die ersten Versuche in Göttingen ergaben eine zwar kleine, aber bestimmt wesentliche Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment, nämlich eine Verschiebung der experimentellen gegenüber den theoretischen Kurven in der Frequenzrichtung. Der Grund dafür dürfte sein, daß die verwendete Stange aus drei zusammengeklebten Teilen bestand. Bei nichtidealer mechanischer Verbindung sind Abweichungen zu erwarten, die sich als eine Frequenzverlagerung auswirken. Wir haben daher die Experimente in Delft (Prof. KOSTEN) mit einer Stange wiederholt, deren Teile durch Hartlötung miteinander verbunden waren. Die beschriebenen Resultate beziehen sich auf die Messungen in Delft; sie weisen die erwähnte Diskrepanz tatsächlich nicht mehr auf.

Die Resultate zeigt Abb. 7b zusammen mit den berechneten Werten.

Es kann daher als Schlußfolgerung gesagt werden, daß die Meßergebnisse mit der Theorie recht gut übereinstimmen.

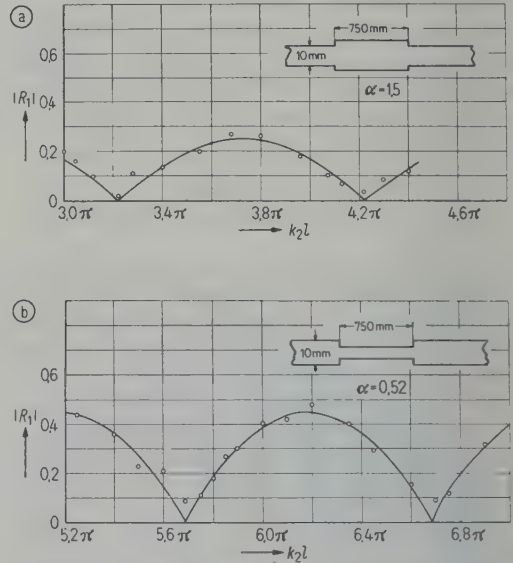


Abb. 7. Reflexionsfaktor  $R_1$  eines doppelten Querschnittssprungs in Abhängigkeit von der Frequenz  
(a) Querschnittserweiterung,  
(b) Querschnittsverengung;  
— berechnete Kurve,  $\circ$  Meßpunkte.

Herrn Prof. Dr. E. MEYER, Göttingen, bin ich für den zur Verfügung gestellten Arbeitsplatz in seinem Institut, für die Themenstellung und wertvolle Ratschläge zu Dank verpflichtet. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. C. W. KOSTEN, Delft, für seine Anregung zu der Arbeitsrichtung. Herrn Dr. G. KURTZE habe ich für seine Unterstützung bei der Abfassung der Arbeit zu danken.

Die Arbeit wurde teilweise mit Mitteln des Bundeswohnungsbauministeriums durchgeführt.

(Eingegangen am 10. September 1954.)

#### Schrifttum

- [1] CREMER, L., The propagation of structure borne sound. DSIR Report Nr. 1, series B, auszugsweise publiziert in *Acustica* **3** [1953], 317.
- [2] EXNER, M.-L. und BÖHME, W., *Acustica* **3** [1953], 105.
- [3] KURTZE, G., TAMM, K. und VOGEL, S., *Acustica* **5** [1955], im Druck.
- [4] OBERST, H., *Acustica* **2** [1952], AB 181.



# ATTENUATION OF THE (1,0) AND (2,0) MODES IN RECTANGULAR DUCTS

by A. M. GHABRIAL\*

King's College, Newcastle upon Tyne, England

## Summary

The attenuation constant of the (1,0) and the (2,0) modes of a rectangular duct have been studied in the frequency range 1180...3400 c/s. A rectangular duct, confining a constant volume between a source and a reflector, is constrained to move between fixed rails. The various modes are excited by the 'hole' method and the sound field within the duct is surveyed by a probe microphone small enough not to disturb the sound field. The standing-wave ratio is measured by a resonance peak method which has the advantage of avoiding the need to delineate the complete standing-wave pattern along the tube and it is suitable for determining small attenuations which is the case in this work. The experimental attenuation constants for the (1,0) and the (2,0) modes agree with the theory of BEATTY within 1%.

## Sommaire

On a déterminé dans la gamme de fréquences 1180...3400 Hz la constante d'affaiblissement des modes d'un conduit de section rectangulaire. Ce dernier se déplace entre des rails fixes tout en conservant entre source et réflecteur un volume constant. L'excitation utilise la méthode du «trou», et on explore le champ au moyen d'une sonde microphonique. On mesure le taux d'ondes stationnaires par la méthode du maximum de résonance qui permet de ne pas déterminer la totalité du diagramme le long du conduit et convient pour mesurer les petits affaiblissements. Les constantes d'affaiblissement trouvées expérimentalement pour les modes (1,0) et (2,0) concordent à 1 % près avec celles déduites de la théorie de BEATTY.

## Zusammenfassung

Die Dämpfungskonstante der Schwingungstypen (1,0) und (2,0) in einem rechteckigen Rohr wurde im Frequenzbereich 1180...3400 Hz gemessen. Um die hier auftretenden geringen Dämpfungen noch messen zu können und die Abtastung des ganzen Schallfeldes zu vermeiden, wurde zur Bestimmung der Welligkeit nur die Resonanzspitze der Rohrresonanz mit einem Sonden-mikrophon ausgemessen. Die so ermittelten Dämpfungskonstanten stimmen innerhalb von 1 % mit der Theorie von BEATTY überein.

## 1. Introduction

The attenuation of higher modes in tubes has been investigated theoretically by P. M. MORSE [1] considering a small wall admittance. ROGERS [2] derived theoretically an approximate expression for the attenuation constant in rectangular tubes having absorbing walls. HARTIG and LAMBERT [3] measured the attenuation of the (1,0) mode in a rigid rectangular tube having a slot along its length in the frequency range 2400...4000 c/s and put forward an empirical formula for the attenuation in the gas due to viscosity and thermal conductivity. LAMBERT [4] later derived an approximate theoretical expression for this attenuation constant. BEATTY [5] and SHAW [6] used CREMER's [7] boundary layer method to get expressions similar to that of LAMBERT for the attenuation of higher modes in ducts. SHAW tested his theory for the (1,0) mode in rectangular ducts and in different gases.

This brief survey indicates that little work has been done on the measurement of the attenuation of the higher modes in ducts, and even the measurements of LAMBERT and SHAW were for the (1,0) mode only.

In this work the attenuation of the (2,0) mode as well as that of (1,0) mode is measured in air by an improved method.

## 2. Apparatus

### 2.1. The wave guide

The wave guide is a rectangular tube 300 cm long 17.2 cm wide, and 8.9 cm in height, made of hardwood 2.5 cm thick. It is bolted by rectangular wooden belts 5 cm wide and 2.5 cm thick fixed 30 cm apart to keep the cross-sectional dimensions constant within 0.2%. By the aid of wooden guides, the tube is constrained to move along its axis by coupling it to a large slow-motion screw reading to 0.025 mm. These guides as well as the wooden binders a foot apart

\* Now at the University of Cairo.

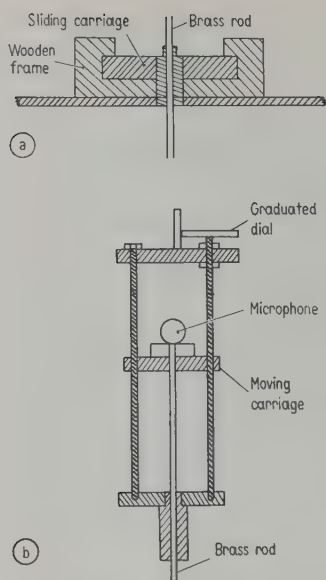


Fig. 1. (a) Sliding carriage, (b) Vertical traverse for microphone.

prevent flexural vibrations of the walls on the tube.

A slot 0.5 cm wide is cut across the middle of the tube (Fig. 1a). A wooden sliding plate 1.5 cm thick, having a spline which fits the slot is used to carry the microphone across the tube. Its length is so chosen that it always covers the slot completely whatever may be the position of the microphone *M*. In order to reduce any possible vibration of the walls of the tube near the slot, this part of the tube is strengthened by a 2 cm thick wooden board.

A vertical moving device (Fig. 1b) is fixed to the sliding carriage and carries the microphone *M*.

## 2.2 The source

The construction of the source is shown in Fig. 2. CFED is a brass uniform circular tube, 1.5 cm diameter. In the limb DE is fitted an airtight piston *P*, pierced by a 0.3 cm diameter hole. This piston acts as a source and is connected to an ear-phone *L*, used as a loudspeaker, by a hard rubber tubing *R*. The second limb CE is fitted with a moveable solid piston *P*<sub>2</sub> acting as a perfect reflector. These two pistons can be moved by screws.

The part EF of the tube is flush to the end plate AA of the main wave-guide, and two holes for the (1,0) mode or three holes for the (2,0) mode half a wave-length apart are symmetrically drilled through AA and EF. Although in theory it is advisable to make the spacing equal

to a half wave-length, yet in practice it is found that this spacing is not very critical. A change of the resonance frequency by about 10% does not affect the condition. The positions of the holes are chosen to be at pressure nodes with respect to the resonating tube CDEF, this choice being most convenient as the impedance at a pressure node is nearly infinite. Thus the impedance of the end plate AA of the wave-guide can be considered infinite irrespective of the presence of the holes.

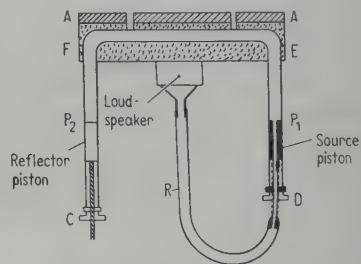


Fig. 2. Source end of guide.

## 2.3 The detector

A measurement of the pressure within the tube is carried out by a probe microphone. The probe is an injection needle of about 0.05 cm in diameter bent at a right angle at its far end to minimise its reflection effect on the sound field in the plane where the measurements are taken. It is connected to an ear-phone, operating as a microphone, by a small piece of rubber tubing to reduce the effect of the mechanical coupling between the tube and the microphone. There is no need to calibrate the probe microphone since it is sufficient to obtain relative measurements at a specified frequency.

## 3. Sources of error

### 3.1. Probe reflections

Sound reflections from the probe arise either from the body of the tube or the probe itself, or from its input admittance. The part arising from the body of the tube is minimized by choosing a probe of the smallest possible dimensions with respect to the wave-length, and by bending the end of the probe so that the measurements can be taken on a plane other than that confining the body of the probe.

Any obstacle which is small compared with the wave-length in the wave-guide behaves like a shunt admittance on the equivalent transmission line. This analogue enables us to derive the following simple expression for the coefficient of reflection of a probe:



$$r_p = \frac{\eta_0 - (\eta_0 - \eta_p)}{\eta_0 + (\eta_0 + \eta_p)} \tag{1}$$

where  $\eta_0$  is the admittance at a point in the tube before the probe of input admittance  $\eta_p$  is introduced.

If  $\eta_p$  is very small in comparison with  $\eta_0$ , then the reflection from the probe is negligible, for (1) becomes

$$r_p = -\eta_p/2 \eta_0. \tag{2}$$

This condition can be fulfilled by choosing a non-resonant probe or else by confining the measurements around a pressure antinode where the admittance  $\eta_0$  is obviously large.

In the present work these two conditions are fulfilled by choosing the length of the probe for any frequency to be non-resonant, and by making measurements near pressure antinodes.

The following test was made to ascertain the effect of the probe on the sound field. A constant length sound interferometer used for the test is shown in Fig. 3. A and B are two circular tubes of internal diameters 6.0 and 5.8 cm respectively, sliding telescopically one inside the other; S is the source and R is a heavy and smooth reflector.

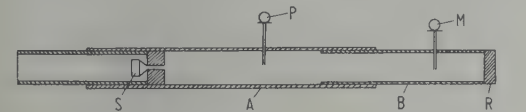


Fig. 3. Test of sound reflections from microphone probe.

In making the test the tube is first adjusted to resonance. The position and value of a certain minimum is recorded by a probe P, the probe M under investigation is inserted into the tube B at a distance of a quarter wave-length and the position and value of the previous minimum are again checked by the probe microphone P. No change could be detected. However if the probe M is inserted at a pressure node and the same procedure is repeated, a very small change of about one per cent in the value of the pressure minimum is observed.

### 3.2. Vibration of the tube walls

To test how far the attenuation is affected by wall vibration, the attenuation coefficient was measured in a preliminary tube without any ‘binders’. The result was very high compared with the theoretical value and the discrepancy is attributed to wall vibrations, flexural and otherwise. To eliminate these the tube was gripped by thick wooden belts at distances of a foot apart and was constrained between two rigidly fixed rails.

### 3.3. Constancy of the cross-sectional dimensions

The cut-off frequency of the wave guide for any higher mode depends on its cross-sectional dimensions, and variations of these dimensions will result in unequal spacing of the pressure antinodes in the guide.

This source of error was reduced by the use of wooden belts to keep the cross-sectional dimensions of the tube constant to within about 0.5 % along the whole length. Moreover measurements have been confined to a part of the tube where the observed wave-length was constant to about 0.2%.

### 3.4. Non-linearity of the acoustical system

In the present work the relative response of the microphones P and M was compared with the output of the oscillator to eliminate the effect of changes in the electrical circuit. However it is necessary that the acoustic system should be linear and to check this the voltage fed into the loudspeaker was increased in steps of 1.5 volts and the response of the microphone measured. Perfect linearity existed up to 30 volts and the working voltage was always taken below 3 volts.

## 4. Methods of measurement

### 4.1. Procedure and theory

The general procedure is to adjust the sound source to excite the required mode at the required frequency and then the tube to resonance as indicated by the maximum response of the microphone M at the reflector end. The presence of the pure mode is then checked by surveying the field across the tube. The wavelength within the duct is measured by locating the successive minima along it.

Now before describing the method of measuring the attenuation constant due to the gas in the wave guide, it may be well to express the attenuation constant in terms of measurable quantities.

According to P. M. MORSE, for a solid termination in the standing wave pattern of the plane wave, the magnitude of the excess pressure  $P_x$  is

$$|P_x| = |P_0| \sqrt{\cosh 2 \alpha x + \cos 2 r x} \tag{4}$$

where  $\alpha$  is the attenuation constant in neper  $\text{cm}^{-1}$  and  $r$  is the reflection coefficient at the termination from which is measured.

If  $\alpha^2 \ll r^2$  as in the present case, the standing wave ratio is

$$S = P_{min}/P_{max} = \tanh \alpha x \tag{5}$$

$$\text{or} \quad \alpha = \frac{1}{x} \tanh^{-1} S. \tag{6}$$

If  $\tanh^{-1}S$  is plotted against  $x$  a straight line should be obtained whose slope gives  $\alpha$ .

The correctness of the suppositions made in deriving the equation appears justified from the linearity of the experimental relation between  $\tanh^{-1}S$  and  $x$  (Fig. 4 and 5). Moreover, the attenuation constant in the present work changes from about  $140 \cdot 10^{-5}$  up to  $200 \cdot 10^{-5}$  nepers  $\text{cm}^{-1}$ , while the wavelength within the guide changes from about 10 to 60 cm.

#### 4.2. Measurement of the standing-wave ratio

The standing-wave ratio  $S$  can be measured by recording the sound pressure along the waveguide with particular attention to the values at the nodes and antinodes, but in carrying out these observations, it is found that the values of the pressure minima are too small to measure.

The alternative method is basically analogous to the curve-width method of determining the  $Q$ -factor of a tuned circuit. The width  $W$  of the trough in the standing wave pattern is measured. This width is defined as the distance between two points of equal pressures on both sides of a pressure antinode, at which the value of the pressure is  $K$  times that at the antinode.  $K$  may be chosen arbitrarily and according to convenience. In this way the standing-wave ratio  $S$  can be expressed in terms of  $K$  and  $W/\lambda_g$  where  $\lambda_g$  is the guide wavelength.

The pressure  $P_x$  at a point near an antinode in a standing wave pattern is given by

$$P_x = P_r(1 + r_1) \quad (7)$$

where  $r_1$  is the reflection coefficient at the point, and  $P_r$  is the pressure in the wave progressing in the  $x$ -direction. Now

$$r_1 = |r_1| 2 e^{i\gamma x} \quad (8)$$

where  $\gamma = 2\pi/\lambda_g$  is the propagation constant. Here  $x$  will be the distance of the point in question from the antinode.

In this treatment it is assumed that the amplitude of the reflection coefficient remains constant around the antinode, since the attenuation  $\alpha$  as well as the distance  $x$  are small quantities.

The magnitude of  $P_x$  is given by

$$|P_x|^2 = |P_1|^2 (1 + |r|^2 - 2|r|\cos 2\gamma x). \quad (9)$$

If  $x = W/2$  then by the definition of  $K$  it follows that

$$K^2 = \frac{1 + |r|^2 - 2|r|\cos \gamma W}{1 + |r|^2 - 2|r|}. \quad (10)$$

Now the standing-wave ratio is given by  $S = (1 - |r|)/(1 + |r|)$ . So relation (10) reduces to

$$K^2 = 1 + (S^2 - 1) \sin^2 \gamma W/2 \quad (11)$$

whence

$$S = \frac{\sin \gamma W/2}{\sqrt{K^2 - \cos^2 \gamma W/2}} = \frac{\sin(\pi W/\lambda_g)}{\sqrt{K^2 - \cos^2 \gamma W/2}}. \quad (12)$$

This equation enables the standing-wave ratio to be calculated from readily measurable qualities.

To determine  $K$ , the sensitivity of the amplifier and the power of the oscillator are increased so that the meter indicates a considerable deflection, about 30 scale divisions (readable with a certainty of about one quarter of a scale division) when the microphone is at an antinode. The other observations around the antinode are conducted in the usual way. In practice, it is preferable in most cases to plot a graph for the relative pressure against the position of the probe-microphone  $M$  and to calculate  $W$  and  $K$  therefrom.

#### 5. Results and discussion

Results have been taken at six different frequencies for each mode. For the (1,0) mode the frequencies range from 1180 up to 1200 c/s. For the (2,0) mode the frequencies are embraced in the interval 2220 to 2400 c/s.

Figs. 4 and 5 represent the standing-wave ratio  $\tanh^{-1}S$  against the distance  $x$  from the reflector. The variation of the attenuation in the

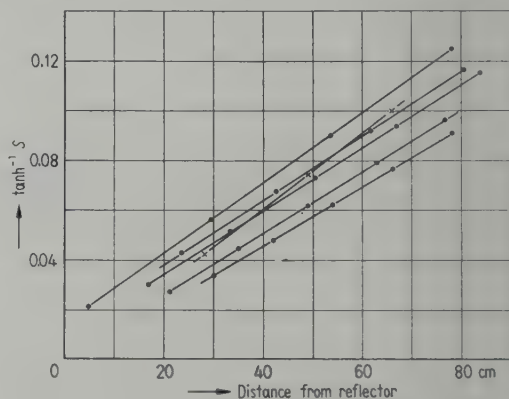


Fig. 4.  $\tanh^{-1}S$  v. reflector distance; (1,0) mode.

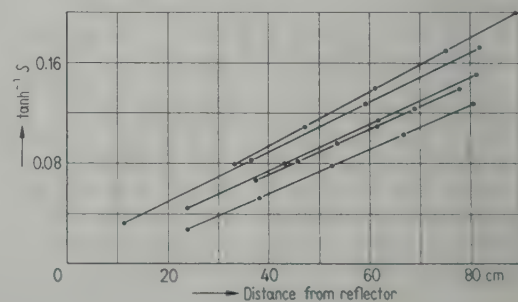


Fig. 5.  $\tanh^{-1}S$  v. reflector distance; (2,0) mode.



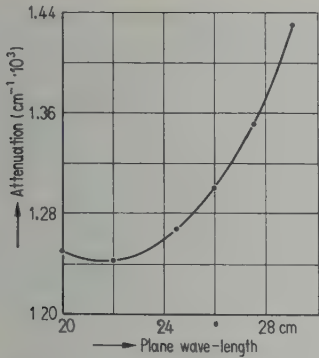


Fig. 6. Attenuation v. wave-length of plane wave; (1,0) mode.

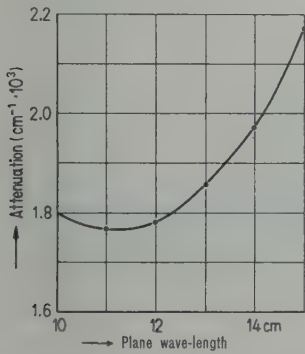


Fig. 7. Attenuation v. wave-length of plane wave; (2,0) mode.

duct with the plane wave length for the (1,0) and the (2,0) modes is shown in Figs. 6 and 7. These figures show the large increase of the attenuation of the higher modes in the duct as the frequency approaches the cut-off frequency of a particular mode.

Following SHAW the expression for  $\alpha$  can be written in the form

$$\alpha = \left( A_1 \frac{\lambda_g}{\lambda} + A_2 \frac{\lambda}{\lambda_g} \right) \sqrt{f} \tag{13}$$

where

$$A_1 = \frac{\sqrt{\pi} \nu}{c} \cdot \frac{1}{z_1} + (\chi - 1) \frac{\sqrt{\pi} \beta}{c} \left( \frac{2}{y_1} + \frac{1}{z_1} \right) \tag{14}$$

and

$$A_2 = \frac{\sqrt{\pi} \nu}{c} \cdot \frac{2}{y_1} \tag{15}$$

Here

- $c$  = sound velocity in the gas
- $\lambda$  = wavelength
- $C_v$  = specific heat of the gas at constant volume
- $\chi$  = ratio of the principal specific heats of the gas
- $\nu$  = kinematic viscosity of the gas,
- $\beta = k/\chi C_v \varrho$  = thermal ‘diffusivity’ of the gas,
- where  $k$  is the coefficient of thermal con-

ductivity, and  $\varrho$  is the mean density of the gas,

- $z_1$  = width of the guide,
- $y_1$  = depth of the guide,
- $f$  = frequency.

On insertion of accepted values of constants for air in eqs. (14) and (15);

$$A_1 = 2.375 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{1/2},$$
$$A_2 = 2.249 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{1/2}.$$

By substituting these values in (13) the ‘theoretical’ attenuation constant is obtained.

Tables I and II show the agreement between the ‘theoretical’ attenuation constant calculated from the above expression (13) and the measured attenuation constant as found from Figs.4 and 5.

Table I  
Values of attenuation for (1,0) mode  
(cut-off frequency = 967 c/s)

Frequency	theoretical	experimental
c/s	neper cm <sup>-1</sup>	neper cm <sup>-1</sup>
1180	140 · 10 <sup>-5</sup>	143 · 10 <sup>-5</sup>
1240	134 · 10 <sup>-5</sup>	135 · 10 <sup>-5</sup>
1320	130 · 10 <sup>-5</sup>	130 · 10 <sup>-5</sup>
1395	127 · 10 <sup>-5</sup>	127 · 10 <sup>-5</sup>
1550	125 · 10 <sup>-5</sup>	124 · 10 <sup>-5</sup>
1700	126 · 10 <sup>-5</sup>	125 · 10 <sup>-5</sup>

Table II  
Values of attenuation for (2,0) mode  
(cut-off frequency = 1935 c/s)

Frequency	theoretical	experimental
c/s	neper cm <sup>-1</sup>	neper cm <sup>-1</sup>
2270	216 · 10 <sup>-5</sup>	217.5 · 10 <sup>-5</sup>
2430	196 · 10 <sup>-5</sup>	197 · 10 <sup>-5</sup>
2610	186 · 10 <sup>-5</sup>	186 · 10 <sup>-5</sup>
2850	180 · 10 <sup>-5</sup>	178 · 10 <sup>-5</sup>
3090	178 · 10 <sup>-5</sup>	177 · 10 <sup>-5</sup>

6. Conclusion

By using a narrow non-resonant probe tube with a bent end situated at a pressure antinode the disturbing effects of the probe in the acoustic field have been considerably minimised. This is particularly important in attenuation measurements. The technique employed to measure and calculate the standing-wave ratio from the width of a trough is especially suitable for small attenuations, as besides reducing reflection errors at the pressure maximum it avoids the uncertainty in determining, by the ordinary way, the magnitude of the pressure minimum.

The attenuation constant measured for the (1,0) mode is in agreement with the theoretical expressions of LAMBERT, BEATTY and SHAW.

The attenuation for the (2,0) mode is in conformity with the theory to about 1% which is within the limits of experimental error.

#### Acknowledgments

The author wishes to offer his thanks to Dr. E. G. RICHARDSON for advice during the course of the experiments and to Dr. R. W. B. STEPHENS for suggestions in the writing of the paper.

(Received 28th December, 1954.)

#### References

- [1] MORSE, P. M., Vibration and sound, McGraw Hill Book Co., New York 1948, 2nd Ed., p. 368.
- [2] ROGERS, R., J. acoust. Soc. Amer. **11** [1940], 480.
- [3] HARTIG, H. E. and LAMBERT, R. F., J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 42.
- [4] LAMBERT, R. F., J. acoust. Soc. Amer. **23** [1951], 480.
- [5] SHAW, E. A. G., J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 512; **25** [1953], 224; Acustica **3** [1953], 87.
- [6] BEATTY, R. E., J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 639 and 850.
- [7] CREMER, L., Arch. elekt. Übertrag. **2** [1948], 136.

## EIN EXPERIMENT ZUR DEMONSTRATION VON KAVITATIONSBLASEN UND KAVITATIONSKEIMEN

von W. GÜTH

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

### Zusammenfassung

Es wird ein einfaches Gerät beschrieben, mit dem sich die Umrisse von Kavitationsblasen in etwa 100facher Vergrößerung projizieren und dadurch einem großen Hörerkreise sichtbar machen lassen. Die Blasen entstehen an einer Stahlmembran, die durch einen Druckstoß angeregt wird. Kurze Zeit nach der Stoßanregung wird die Kavitationsblase von einem Hochspannungsfunken beleuchtet und dadurch projiziert. Bevor sie sich ausbildet, entstehen unter dem Einfluß des durch den Stoß hervorgerufenen Unterdruckes viele kleine Blasen an im Wasser befindlichen Kavitationskeimen.

### Summary

A simple apparatus for projecting the outlines of cavitation bubbles 100-fold for demonstration to a large audience is described. The bubbles are formed on a steel diaphragm excited by a pressure pulse. Shortly after the excitation, the cavitation bubbles are illuminated by a high-voltage spark and so projected. Before they grow there appear, under the influence of the negative pressure set up by the pulse, many small bubbles on the cavitation nuclei existing in the water.

### Sommaire

On décrit un dispositif simple qui permet de projeter, avec un grossissement d'environ 100 fois, la silhouette des bulles de cavitation, de façon à montrer ces bulles à un grand nombre de spectateurs. Les bulles sont produites par une membrane en acier qui est excitée par une impulsion de pression. Un temps court après cette excitation, les bulles de cavitation sont éclairées par une étincelle haute tension et sont projetées sur un écran. Avant l'apparition d'une bulle de cavitation de nombreuses petites bulles se forment à partir des germes de cavitation existant dans l'eau, sous l'effet de la dépression créée par l'impulsion.

### 1. Einleitung

Kavitation ist der Übersetzung des Wortes gemäß die Bildung von Hohlräumen. Und zwar sind hier stets Hohlräume in Flüssigkeiten, insbesondere in Wasser, gemeint. Man kann sie erzeugen, indem man das Wasser, oder kleine Bereiche darin, einer Zugbeanspruchung solcher Stärke aussetzt, daß die Zugkräfte die Kräfte der molekularen Bindung überschreiten. Dann zerreißt das Wasser, es bildet sich ein Hohlraum, eine Kavitationsblase. Auf diese Weise entsteht Kavitation in Düsen, an Schiffschrauben, an Wasserschallsendern usw.

Allerdings brauchen fast niemals die zur Erzeugung von Kavitationsblasen notwendigen

Zugkräfte die Kräfte der molekularen Bindung zu erreichen. Das hat seinen Grund darin, daß stets kleine Fremdkörper — etwa Staub — vorhanden sind, zu denen die Adhäsionskraft geringer ist, als die Kohäsionskraft des Wassers. Hinzu kommt, daß solche Staubeilchen meistens in eine dünne Lufthaut eingehüllt sind. Natürlich setzt an derartigen Fremdkörpern die Kavitation leichter und eher ein als im freien Wasser. Sie stellen also Kavitationskeime dar. Als Keime sind auch Rauigkeiten — häufig wieder mit Lufthäuten und -einschlüssen — an festen Oberflächen anzusehen.

Für ein Demonstrationsexperiment sind die oben genannten Verfahren der Kavitations-



erzeugung deshalb nicht sonderlich geeignet, weil sie einen apparativen Aufwand erfordern, dem das Inventar einer für Vorlesungszwecke bestimmten Sammlung physikalischer Geräte in der Regel nicht gewachsen ist. Vor allem aber ist ja eine wesentliche Forderung, die man an einen Demonstrationsversuch stellen sollte, die nach Einfachheit und Übersichtlichkeit der verwendeten Versuchsanordnung. Mit dem Ziel, dieser Forderung möglichst zu entsprechen, wurde der im folgenden beschriebene Versuch zusammengestellt und verwendet, der es ermöglicht, die Umrisse von Kavitationsblasen durch Projektion einem großen Hörerkreise sichtbar zu machen.

## 2. Der Versuch

In einer mit Wasser gefüllten Kuvette ist eine Stahlmembran fest eingespannt. Zwischen ihr und einer in geringem Abstand darüber befestigten metallischen Spitze (Abb. 1) wird ein Hochspannungsfunkte ausgelöst. Der dadurch im Wasser über der Membran entstehende sehr heftige Druckstoß beult die Membran ein wenig aus und treibt das darunter befindliche Wasser nach

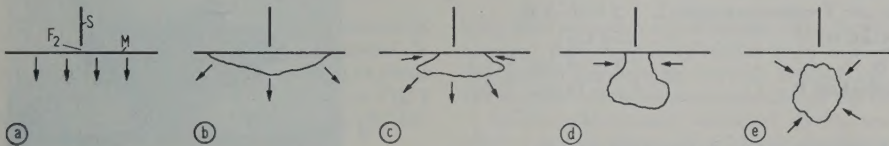


Abb. 1. Skizze der Stoßanordnung und des Kavitationsablaufs. S Metallstab, M Membran,  $F_2$  Stoßfunkenstrecke. Die Pfeile deuten die Bewegung des Wassers an.

unten in der Richtung der Pfeile (Abb. 1a) fort. Wegen der der Membran eigenen Rückstellkraft wird deren Auslenkungsgeschwindigkeit kurz danach geringer. Das Wasser aber ist dank seiner Trägheit bestrebt, die ihm durch den Stoß übertragene Anfangsgeschwindigkeit beizubehalten, und wird sich, wenn der Stoß heftig genug war, von der Membran losreißen, sobald die Adhäsionskraft überschritten wird. Die Membran schleudert also das Wasser regelrecht von sich fort; es entsteht eine Kavitationsblase (Abb. 1b).

Während sich im weiteren Verlauf die Grenzfläche von der Membran entfernt, strömt von den Seiten her das dort befindliche Wasser in den Hohlraum nach, solange, bis die Blase sich völlig abgeschnürt hat (Abb. 1c,d,e). Schließlich implodiert dann die Blase, wie es von anderen Beobachtungen über Kavitationsvorgänge her bekannt ist [1]...[4].

Wird einen Augenblick nach der Stoßauslösung das Gebiet unter der Membran mit einem sehr kurzzeitig brennenden Lichtblitz beleuchtet,

so kann man, je nach dem zeitlichen Abstand zwischen Stoß und Belichtung, die Kavitationsblase in einer der eben beschriebenen Phasen ihrer Lebensgeschichte sehen, bzw. projizieren.

## 3. Die Versuchsanordnung

Eine Skizze des elektrischen Teils zeigt Abb. 2. Es ist im wesentlichen die MACHSche Verzögerungsschaltung [5]. Eine Hochspannungsquelle H

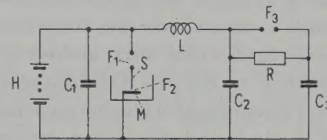


Abb. 2. MACHSche Funkenverzögerungsschaltung.

lädt die Kondensatoren  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  auf, bis bei etwa 8000 V die Durchschlagsspannung der hintereinandergeschalteten Funkenstrecken  $F_1$  und  $F_2$  erreicht ist.  $F_1$  ist eine Luftfunkenstrecke,  $F_2$  die unter Wasser befindliche Stoßfunkenstrecke zwischen der Spitze S und der Membran M. Durch das Umschwingen des aus  $C_1$ ,  $C_2$  und L bestehen-

den elektrischen Kreises kehren sich die Ladungen an den Platten von  $C_2$  um, und die Funkenstrecke  $F_3$ , die der Beleuchtung dient, schlägt durch. Die Verzögerung zwischen Stoß- und Beleuchtungsfunkten ist natürlich von den Kapazitäten  $C_1$  und  $C_2$ , der Induktivität L und den

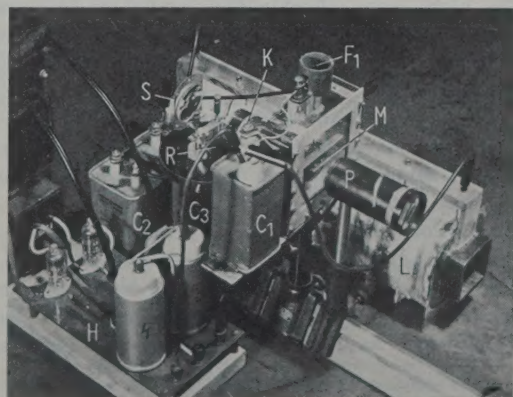


Abb. 3. Gesamtansicht des Gerätes.



Elektrodenabständen der Funkenstrecken abhängig.

In Abb. 3 ist die Gesamtansicht des Gerätes gezeigt. Vorn links die Hochspannungsquelle H. In der Bildmitte auf der optischen Schiene stehend die Wasserküvette mit der Membran M, die aus mechanischen und optischen Gründen ein wenig gewölbt ist. Davor ein Projektionsobjektiv P. Beleuchtet wird die Küvette durch die Funkenstrecke  $F_3$  mittels des Hohlspiegels S und des Kondensors K. Hinter der optischen Anordnung ist die Spule L zu sehen, die zum Zwecke der Verzögerungsregulierung mit mehreren Anzapfungen versehen wurde. In das Innere der Spule lassen sich Transformatorbleche einschieben.

In der Tabelle I sind die Daten der verwendeten Teile und Geräte zusammengestellt.

Tabelle I

Spannung des Hochspannungsgenerators H . . . . .	10 kV
Kapazitäten $C_1, C_2, C_3$ . . . . .	0,05, 0,5, 0,5 $\mu$ F
Abstand der Funkenelektroden $F_1, F_2, F_3$ . . . . .	5, 0,2, 8 mm
Dicke der Membran M (Uhrfeder) . . . . .	0,4 mm
Induktivität der Verzögerungsspule L . . . . .	2 mH...2 H
Ladewiderstand R . . . . .	50 k $\Omega$
Kondensor K . . . . .	$f = 5$ cm, 1:1,5
Projektionsobjektiv P . . . . .	$f = 10$ cm, 1:2,5

#### 4. Aufnahmen der Kavitationsblasen

Im folgenden sollen einige Aufnahmen den Ablauf des Kavitationsvorganges, wie er oben geschildert wurde, illustrieren<sup>1</sup>.

Für die erste Aufnahme, Abb. 4a, wurde die Verzögerungszeit zwischen Stoß und Belichtung sehr kurz gewählt, etwa  $10^{-4}$ s. Das Wasser hat sich eben von der Membran abgelöst. An der Rauigkeit seiner Oberfläche erkennt man, daß das nicht ganz gleichmäßig geschehen ist, was auf die Wirksamkeit der eingangs erwähnten Keime an der Membranoberfläche zurückzuführen ist.

Daß nicht nur an der Membranoberfläche Kavitationskeime vorhanden sind, sondern auch in großer Menge im Innern des Wassers, sieht man an den vielen schwarzen Punkten in der Bildfläche von Abb. 4a. Es sind kleine Kavitationsbläschen, die sich um die Keime gebildet haben, kurz bevor sich das Wasser von der Membran losriß; denn bis dahin war ja die ganze vor der Membran befindliche Wassermasse einer starken

<sup>1</sup> Natürlich zeigt jedes Teilbild der Abb. 4 eine andere Blase. Es sind nicht kinematographische Aufnahmen einer einzigen.

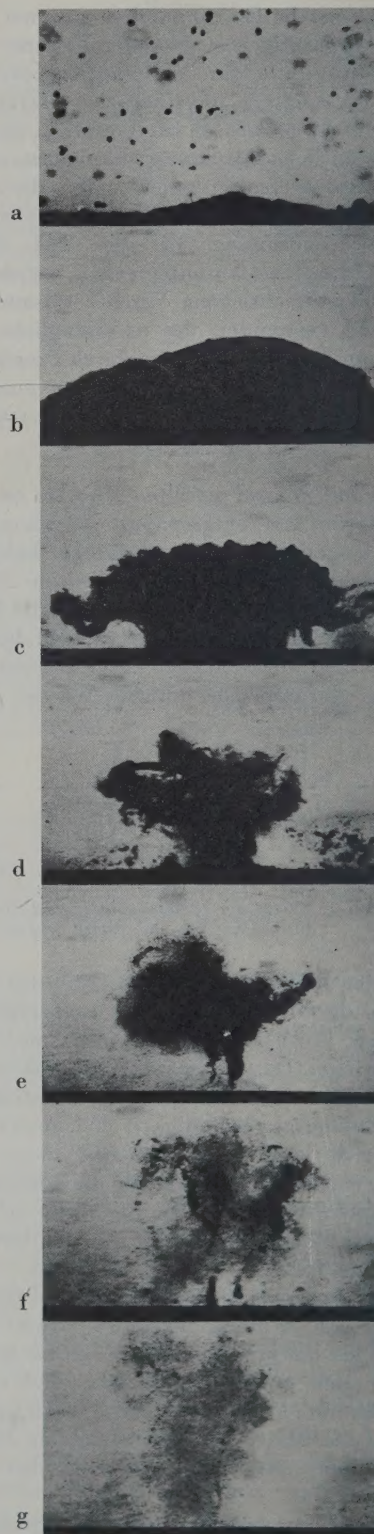


Abb. 4. Aufnahmen von Kavitationsblasen bei verschiedener Verzögerung.



Zugbeanspruchung ausgesetzt. Nach dem Abreißen der Oberfläche läßt die Zugspannung sofort nach, und die Bläschen implodieren augenblicklich. Auf den späteren Aufnahmen treten sie in dieser Form und Größe nicht wieder auf.

Die folgenden Bilder, Abb. 4b...g, sind mit stufenweise vergrößerter Beleuchtungsverzögerung aufgenommen. In Abb. 4b ist die Ablösung des Wassers vollzogen, und in Abb. 4c beginnt bereits Wasser von den Seiten her nachzuströmen. Die weiteren Bilder zeigen den Zerfall der Blase. Ihre Oberfläche ist merkwürdig zerklüftet, ein Umstand, auf den hier nicht eingegangen werden soll. Während der letzten Zerfallsphase erscheint die Blase in einen Nebel bestehend aus vielen winzigen Bläschen gehüllt. Er ist auf den letzten

Bildern deutlich zu sehen und bleibt schließlich allein übrig. Über diesen Nebel, der eine typische Begleiterscheinung des Kavitationsvorganges ist, soll bei späterer Gelegenheit noch berichtet werden.

(Eingegangen am 20. Dezember 1954.)

#### Schrifttum

- [1] KNAPP, R. und HOLLANDER, A., Laboratory investigations of the mechanism of cavitation. Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. **70** [1948], 419.
- [2] KORNFELD, M. und SUVOROV, L., On the destructive action of cavitation. J. appl. Phys. **15** [1944], 495.
- [3] HARRISON, M., Experimental study of single bubble cavitation noise. J. acoust. Soc. Amer. **24** [1952], 776.
- [4] GÜTH, W., Kinematographische Aufnahmen von Waserdampfblasen. Acustica **4** [1954], Beiheft 2, 445.
- [5] CRANZ, C., Lehrbuch der Ballistik, Ergänzungsband. Springer-Verlag, Berlin 1936, S. 184.

## ULTRASONIC ABSORPTION IN ANILINE-NITROBENZENE AND ANILINE-ETHYL ALCOHOL MIXTURES

by D. SETTE

Istituto Nazionale di Ultracustica "O. M. Corbino", Rome, Italy

The ultrasonic absorption coefficient was measured in aniline-nitrobenzene and aniline-ethyl alcohol mixtures. In both cases a minimum of the coefficient was found at about 0.3 aniline mole fraction. The results are shown in Fig. 1 ( $\alpha$  is the amplitude absorption coefficient and  $f$  is the frequency).

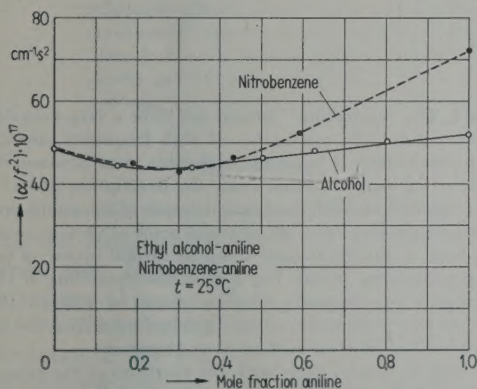


Fig. 1.

In a previous work [1] a similar behaviour was found in mixtures formed by two unassociated highly absorbent liquids having similar absorption coefficients, like benzene and carbon tetrachloride. It is possible in such a case to give a theoretical explanation of the experiments by assuming: 1) that the dissipation in unassociated liquids is mainly due to relaxation in the distribution of energy between external and internal degrees of freedom of the molecules; 2) that the probability of inelastic transitions in collisions of two molecules is larger when the molecules are of different

kind, than when they are of the same type. It was shown [2], however, that this theory breaks down as soon as strong interactions appear either between molecules of any of the two components or between molecules of the two kinds.

Aniline, nitrobenzene and ethyl alcohol are liquids in which a certain degree of molecular association is present and interactions among molecules of any two of them are to be expected. Therefore, the minimum found in the absorption coefficient curves cannot be explained in the same way as for mixtures of unassociated liquids.

The temperature dependence of the absorption coefficient was studied for a mixture aniline-nitrobenzene having 0.3 aniline mole fraction (Fig. 2). The definite decrease of the absorption coefficient shows that the dissipation is bound to some equilibrium destroyed by thermal agitation and confirms what has been said above.

A similar dependence of the absorption coefficient on temperature has been observed in two categories of low viscosity liquids: 1) strongly associated liquids whose molecules can be found in various structural forms of different densities; it is the equilibrium among these structures which is affected by the pressure variations

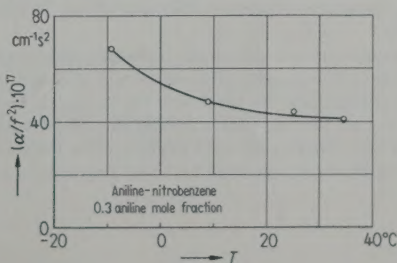


Fig. 2.



produced by sound waves; 2) liquids in which a chemical equilibrium with a low rate constant is present; the equilibrium is this time altered by the temperature variations produced by sound waves. To the last category belong those binary mixtures [3] which have an absorption coefficient curve with a maximum; the equilibria involved are those among different types of association of molecules of the two kinds. In case 1) the relaxation frequencies are well above the experimental range so that  $\alpha/f^2$  is practically constant with frequency; moreover  $\alpha_{\text{experimental}}/\alpha_{\text{classical}}$  has a value roughly between 2 and 3 and it remains practically constant with temperature (for water [4]  $\alpha_{\text{exp}}/\alpha_c$  is 3.11 at 20°C and 3.05 at 60°C; for methyl alcohol [5] the ratio is 2.9 at 20°C and 2.7 at 19.3°C). In case 2) the relaxation frequencies are usually much lower than in case 1) and  $\alpha/f^2$  shows a definite decrease with  $f$  in the experimental frequency range. The ratio  $\alpha_{\text{exp}}/\alpha_c$  has larger variations with temperature (for a water-methyl alcohol mixture with 0.25 alcohol mole fraction  $\alpha_{\text{exp}}/\alpha_c$  is 1.7 at 13.6°C and 2.7 at -10°C).

On the basis of the temperature dependence of  $\alpha$  in the aniline mixtures it seems plausible to admit that the excess absorption in these systems is due to relaxation phenomena of one of the two types mentioned.

In order to have more indication on the kind of process taking place, we have calculated  $\alpha_{\text{exp}}/\alpha_c$  at two temperatures for a mixture aniline-nitrobenzene with 0.3 aniline mole fraction and have measured  $\alpha/f^2$  as function of  $f$ .

The values of density, viscosity and sound velocity needed for the calculation were obtained by means of direct measurements. The ratio  $\alpha_{\text{exp}}/\alpha_c$  is 2.5 at 18.5°C and 1.9 at -9.5°C.

There is therefore a variation of  $\alpha_{\text{exp}}/\alpha_c$  with temperature; the average variation per degree (0.021), however, is

nearer to that found in pure methyl alcohol (0.011) than to that observed in the water methyl alcohol mixtures above quoted (0.042).

A study of absorption with frequency in the mixture aniline-nitrobenzene (0.3 aniline mole fraction) has given for  $(\alpha/f^2) \times 10^{17}$  the values 43.2; 43.3; 43.8 and 42  $\text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^2$  at the frequencies of 8; 25; 38; 53 Mc/s respectively. This shows that  $\alpha/f^2$  is practically constant between 8 and 53 Mc/s.

The two relationships  $\alpha_{\text{exp}}/\alpha_c$  vs temperature and  $\alpha/f^2$  vs  $f$  seem to indicate that the relaxation phenomena which cause the excess sound absorption in the aniline-nitrobenzene mixture studied are mainly due to those structural equilibria which are altered by the pressure variations produced by sound waves. It seems therefore that an explanation for the behaviour of the absorption coefficient in aniline-nitrobenzene and aniline-ethyl alcohol mixtures must be sought on the basis of structural effects of this kind when either nitrobenzene or ethyl alcohol molecules are added to pure aniline. The strong hydrogen bonds which  $\text{NH}_2$  groups of aniline can exchange with either  $\text{NO}_2$  groups of nitrobenzene or OH groups of alcohol are probably responsible for the origin of the structures formed by molecules of the two components.

(Received 28th March, 1955.)

#### References

- [1] SETTE, D., J. chem. Phys. **18** [1950], 1592.
- [2] SETTE, D., J. acoust. Soc. Amer. **23** [1951], 359.
- [3] STOREY, L. R. O., Proc. phys. Soc. B, **65** [1952], 943; SETTE, D., Nuovo Cimento, Serie X, **1** [1955], 800.
- [4] PINKERTON, J. M. M., Nature **160** [1947], 128.
- [5] PELLAM, J. R. and GALT, J. K., J. chem. Phys. **14** [1946], 608.

#### Bookreview

L'acoustique des Orthoptères — Compte rendu du 1<sup>er</sup> Colloque International, Jouy-en-Josas (5–8 Avril 1954), 444 pages, 17 × 24,5 cm<sup>2</sup>, 1175 references, price fr. frs 2800.

This book contains the papers read at an international symposium that took place in France in April 1954. Consequently the book gives a good review of current research in its special field. Being a collection of different papers by a large number of authors, some topics are discussed more than once, but this need not be a drawback. Unfortunately some of the contributions have to be considered only as preliminary reports so that not all are on the same standard.

The papers are systematically arranged into three sections. Section A deals with physical aspects of sound in general (units, definitions, etc.) and with the special topics which are of interest for the subject, especially the frequencies above 20 kc/s. Various types of apparatus for the recording analysis, and the production of these frequencies are de-

scribed. The "ionophone" turned out to be a very valuable instrument for the production of high frequency sounds, but unfortunately it is nearly impossible to understand its construction and its action from the description given.

Section B deals with anatomical details of the sound-producing structures. From the physical point of view it would have been of interest to have a similar careful survey of the sound-perceiving organs. For a good understanding of the significance of communication by sound of insects, the study of the "soundfield" around a sound producing insect, also described in section B, is very important.

Section C, finally, deals with the reactions of the animal on the sound produced by other insects of the same and other species and with the perception of these sounds.

The book ends with a list of references of 44 pages! which should be almost a complete review of literature in this field. It will be evident from the foregoing review that the book is written for specialists; indeed they can find in it many valuable suggestions and information about new techniques.

Hl. de Vries